


一种耦合区间-随机混合可靠性分析方法

谢少军 潘柏松 罗路平 项涌涌
浙江工业大学机械工程学院,杭州,310014

摘要:考虑区间变量的耦合性,基于多椭球模型提出了一种高效的耦合区间-随机混合可靠性分析方法。为解决耦合区间变量导致的可靠性分析计算效率低的问题,采用序列迭代分析方法,将混合可靠性分析的双层耦合循环分解为概率分析与区间分析,并结合多项式插值法提出了一种适用于极限状态函数关于耦合区间变量单调与非单调两种工况的高效区间分析算法。算例结果表明,所提的混合可靠性分析方法具有较好的计算精度与计算效率。

关键词:可靠性分析;多椭球模型;耦合区间变量;区间分析算法

中图分类号:TH122

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2019.14.006 **开放科学(资源服务)标识码(OSID):** 

A Hybrid Reliability Analysis Method with Mixture of Random and Dependent Interval Variables

XIE Shaojun PAN Baisong LUO Luping XIANG Yongyong
College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou,310014

Abstract: Considering the dependence between interval variables, an efficient hybrid reliability analysis method with the mixture of random and dependent interval variables was proposed based on the multi-ellipsoid model. To resolve the inefficiency of the hybrid reliability analysis due to dependent interval variables, a sequentially iterative strategy was adopted for decoupling the double-nest loop of the hybrid reliability analysis into the probability analysis and interval analysis. And an efficient interval analysis algorithm was developed by using polynomial interpolation, which was capable of efficiently handling the cases where the limit-state functions were monotonic or non-monotonic with respect to dependent interval variables. The results of numerical examples show that the proposed hybrid reliability analysis method has good accuracy and efficiency.

Key words: reliability analysis; multi-ellipsoid model; dependent interval variable; interval analysis algorithm

0 引言

因试验数据不足,某些不确定性变量采用区间模型描述,如计算误差、试验数据误差、尺寸公差等,这导致可靠性分析既涉及传统的用概率分布函数描述的随机变量,也存在用区间模型描述的区间变量。区间变量在随机-区间混合可靠性分析中导致双层耦合循环,计算效率较低,由此,国内外学者提出了多种高效的随机-区间混合可靠性分析方法。如 DU^[1] 针对随机变量和区间变量的共存情况,利用序列迭代分析方法将耦合的可靠性问题解耦,并基于一次二阶矩法提出一种

高效的混合不确定性分析方法(unified uncertainty analysis method based on the first order reliability method, FORM-UUA);刘帅杰等^[2] 针对星载可展天线齿轮防卡问题,开展区间与概率变量下的齿轮防卡可靠性的研究;刘海波等^[3] 提出了一种概率-区间混合不确定性下的串并联系统可靠性分析方法。但多数混合可靠性分析方法均假设区间变量是相互独立的,区间变量可取可行域(由其形状也称为箱形域)内任意值,而在工程实际中某些区间变量的可行域是箱形域的子集,即区间变量是相互耦合的。显然,如果将耦合区间变量简化为独立区间变量,则会增加分析结果的不确定性,产生保守结果。因此,考虑区间变量耦合性,提出耦合区间-随机混合可靠性分析方法具有重要的研究意义。

收稿日期:2018-05-10
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51475425);浙江省自然科学基金资助项目(LQ18E050014)

因区间变量的耦合性,在耦合区间-随机混合可靠性分析中导致关于耦合区间变量优化的区间分析更加复杂,其中,区间分析的计算效率是主要技术难点之一。为提高区间分析的计算效率,LUO 等^[4]基于单调性假设提出了一种耦合区间变量和随机变量下的高效同步迭代算法,但当极限状态函数关于耦合区间变量非单调时,该迭代算法无法收敛。通过极坐标转换将耦合区间变量转换为独立区间变量,潘柏松等^[5]基于投影梯度法提出了一种高效区间分析算法,但该区间分析算法需计算极限状态函数关于区间变量的二阶导数,当耦合区间变量数量较多时,计算效率可能较低,并且极坐标转换较大地增加区间分析优化模型的非线性,可能降低区间分析算法的精度。

为进一步解决混合可靠性分析计算效率低的问题,本文提出了一种高效的耦合区间-随机混合可靠性分析方法。利用序列迭代分析方法,将耦合区间-概率混合可靠性分析的双层耦合优化问题分解为概率分析与区间分析各自依序迭代的两部分,并结合多项式插值法提出了一种适用于极限状态函数关于耦合区间变量单调与非单调两种工况的高效区间分析算法。

1 传统可靠性分析方法

设系统响应 G 关于随机变量的函数为

$$G = g(\mathbf{X}) \quad (1)$$

其中, \mathbf{X} 表示 n 维随机变量向量。当 $G < 0$ 时,系统失效,则失效概率 P_f 可表示为

$$P_f = Pr\{G = g(\mathbf{X}) < 0\} \quad (2)$$

其中,函数 $g(\cdot)$ 称为极限状态函数, $Pr\{\cdot\}$ 表示概率。假设 \mathbf{X} 的联合概率分布函数为 $f_x(\mathbf{X})$,通过作失效域 $\Omega = \{\mathbf{X} : g(\mathbf{X}) < 0\}$ 内的积分计算,获得失效概率

$$P_f = \int_{x \in \Omega} f_x(x) dx \quad (3)$$

因为失效域的显式表达式往往难以获取,并且上述积分涉及多重积分计算,故失效概率一般很难由式(3)直接求得,通常用近似方法如一次二阶矩法^[6-9]进行求解。通过对极限状态函数在标准正态分布空间内的线性近似,一次二阶矩法可高效地求得失效概率的近似值。一次二阶矩法主要包括两个步骤,首先利用以下 Rosenblatt 转换,将随机变量 X_i 转换为标准正态分布变量 U_i (用大写字母表示不确定性变量,小写字母表示对应的不确定性变量取得某一数值):

$$u_i = \Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i)] \quad (4)$$

式中, $F_{X_i}(\cdot)$ 为 X_i 的累积分布函数; $\Phi^{-1}[\cdot]$ 为标准正态分布变量的累积分布函数的逆函数。

在标准正态分布空间内,由以下优化问题求解最大概率点 \mathbf{u}^* :

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\| \\ \text{s.t. } g(\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right\} \quad (5)$$

其中, $\|\cdot\|$ 表示向量的模。一旦求得 \mathbf{u}^* , 则失效概率

$$P_f = Pr\{G = g(\mathbf{X}) < 0\} \approx \Phi(-\beta) \quad (6)$$

式中, $\beta = \|\mathbf{u}^*\|$ 为可靠性指标。

2 混合可靠性分析方法

当随机变量与耦合区间变量共存时,极限状态函数可表示为

$$G = g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \quad (7)$$

其中, \mathbf{Y} 表示由耦合区间变量构成的 m 维向量,其多椭球模型^[10-11]可表示为

$$\mathbf{y} \in \mathbf{S} = \{\mathbf{y}_i : (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^c)^T \mathbf{W}_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^c) \leq 1, i = 1, 2, \dots, N_g\} \quad (8)$$

其中, \mathbf{y} 表示 \mathbf{Y} 取得某一点, \mathbf{S} 表示耦合区间变量的可行域。由上式可见,根据区间变量不同的耦合特性,多椭球模型将 \mathbf{Y} 分成了 N_g 个组,即 $\mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_{N_g}\}$, 而每个组用一个椭球模型描述,这就是多椭球模型名称的由来。在上述模型中, \mathbf{W}_i 表示第 i 个椭球模型的特征矩阵, \mathbf{y}_i^c 表示第 i 个椭球模型的均值(椭球几何中心点)。值得注意的是,当 $N_g = m$ 时,多椭球模型退化为描述独立区间变量的区间模型,故本文提出的混合可靠性分析方法同样适用于独立区间变量。更多关于多椭球模型的阐述可参考文献[12]。

假设耦合区间变量为某一定值,即 $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, 则混合可靠性分析变为传统的可靠性分析问题,其失效概率可表示为

$$P_f(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = Pr\{G = g(\mathbf{X}, \mathbf{y}) < 0\} \quad (9)$$

若耦合区间变量在其可行域内变化,则失效概率是关于耦合区间变量的函数。显然,可以从中找到最小和最大失效概率,分别为

$$P_{f \min} = Pr\{G_{\max} = g(\mathbf{X}, \mathbf{y}^*) < 0\} \quad (10)$$

$$P_{f \max} = Pr\{G_{\min} = g(\mathbf{X}, \mathbf{y}^*) < 0\} \quad (11)$$

其中, G_{\max} 、 G_{\min} 分别表示极限状态函数关于耦合区间变量的极大值与极小值, \mathbf{y}^* 表示耦合区间变量优化点,由以下优化问题计算获得,即

$$\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \mathbf{S} \text{ 或 } \max_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \mathbf{S}.$$

由式(10)与式(11)可见,计算最小与最大失效概率是一个双层耦合循环问题,外层循环是以随机变量为变量的概率分析,用于计算失效概率;

内层循环是以耦合区间变量为变量的区间分析，用于求解耦合区间变量优化点。为提高计算效率，采用序列迭代分析方法，将双层耦合循环问题分解为概率分析与区间分析两部分。

在序列迭代分析流程中，概率分析采用前文所述的一次二阶矩法。为降低区间分析的求解难度，首先将耦合区间变量作如下正则化变换：

$$v_i = (\mathbf{A}_i)^{1/2} \mathbf{Q}_i^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^c) \tag{12}$$

其中， $i=1,2,\cdots,N_g$ ， v_i 表示正则耦合区间变量， \mathbf{Q}_i 为正交矩阵，其列向量为 \mathbf{W}_i 的标准特征向量， \mathbf{A}_i 为对角矩阵，其对角元素为对应的 \mathbf{W}_i 特征值，满足 $\mathbf{W}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{A}_i$ 。将式(12)代入式(8)，可得 V 的可行域 \mathbf{V} ：

$$\mathbf{v} \in \mathbf{V} = \{ \mathbf{v} : \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i \leq 1, i=1,2,\cdots,N_g \} \tag{13}$$

由此可见， V 是量纲一的量，各组耦合区间变量的可行域转换为中心位于坐标原点、半径为 1 的球模型。

计算最大失效概率的序列迭代分析流程见图 1。在第 k 迭代步时，标准正态分布变量点由最大概率点迭代算法更新，新的正则耦合区间变量由以下优化问题求得：

$$\min_{\mathbf{v}} g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathbf{V} \tag{14}$$

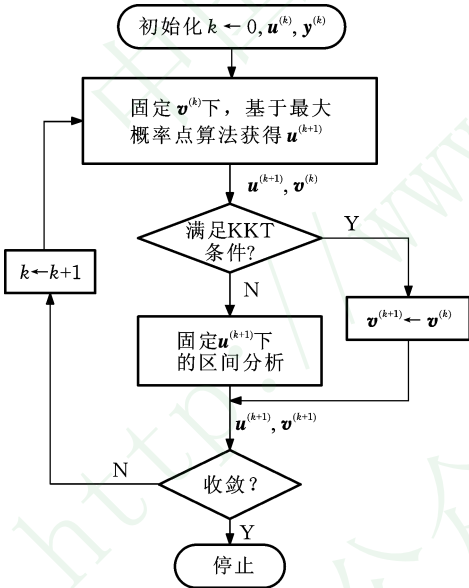


图 1 序列迭代分析流程图

Fig.1 Flowchart of the sequential analysis procedure

为进一步提高效率，在区间分析前，利用式(14)优化问题的 Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件，判断初始值是否为优化点，若是则跳过区间分析，并令 $\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)}$ 。KKT 条件为

$$\left. \begin{aligned} v_i &= - \frac{\nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v})}{\|\nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v})\|} \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i = 1 \\ \nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}) &= 0 \quad \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i < 1 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

$i=1,2,\cdots,N_g$

概率分析与区间分析的序列迭代收敛条件为

$$\left. \begin{aligned} |g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(k+1)})| &\leq \epsilon_1 \\ \|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}\| &\leq \epsilon_2 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

其中， ϵ_1, ϵ_2 为给定的较小正数。当上述条件满足时，则迭代停止，输出最大概率点 $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{(k+1)}$ ，最大失效概率

$$P_{f \max} = \Phi(-\|\mathbf{u}^*\|) \tag{17}$$

在概率分析中，最大概率点算法采用 GONG 等^[13]提出的迭代计算公式：

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \beta^{(k)} \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \tag{18}$$

其中， $\boldsymbol{\alpha}^{(k)}$ 表示第 k 步的单位搜寻方向，即

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k)} = \frac{\mathbf{u}^{(k)} - \lambda \nabla g_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})}{\|\mathbf{u}^{(k)} - \lambda \nabla g_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})\|} \tag{19}$$

搜寻步长

$$\beta^{(k)} = - \frac{g(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}) - \lambda \nabla g_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})^T \mathbf{u}^{(k)}}{\nabla g_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})^T \boldsymbol{\alpha}^{(k)}} \tag{20}$$

其中， $\nabla g_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)})$ 表示关于 \mathbf{u} 的梯度，参数 λ 满足 $\lambda \in (0, 50]$ 。为保证收敛，若 $\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^{(k)}\| \geq \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(k-1)}\|$ ，则参数 λ 被缩小为 λ/s ，其中， s 表示缩小比例，满足 $s \in [1.2, 1.5]$ 。

本文提出了一种高效的区间分析算法，为节省篇幅，仅给出计算最大失效概率的计算公式，计算最小失效概率仅需将式(14)的目标函数 $g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v})$ 替换为 $-g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v})$ 。

3 区间分析算法

区间分析算法的任务是高效求解式(14)的优化问题，求得正则耦合区间变量优化点 \mathbf{v}^* 。令 l 表示区间分析算法的迭代步，每次实施区间分析时，迭代步初始化为零，正则耦合区间变量初始点设为 $\mathbf{v}^{(l=0)} = \mathbf{v}^{(k)}$ 。

首先，假设优化点位于边界点，则可推导获得以下迭代计算式：

$$\mathbf{v}_i^{(l+1)} = - \frac{\nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})}{\|\nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})\|} \tag{21}$$

式中， $\nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})$ 为关于第 i 组正则耦合区间变量 v_i 的梯度， $i=1,2,\cdots,N_g$ 。

若满足优化点位于边界点的假设条件，则基于式(21)的迭代式可高效地求得优化点。但若优化点位于可行域内部，则式(21)不能收敛。为此，利用二阶多项式插值法，搜索在连接两个边界点线段内部的优化点。

判断迭代前后极限状态函数响应值是否减小，若 $g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)}) > g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})$ ，则表明新的迭代点没有降低目标函数响应值，反而比旧的迭代点效果更差，则舍弃新点，而通过沿旧点的梯度反方向搜索新的边界点：

$$\mathbf{v}_i^{(l+1)} = \mathbf{v}_i^{(l)} - a_i \mathbf{G}_{v_i} \tag{22}$$

$$\mathbf{G}_{v_i} = \nabla g_{v_i}(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)}) \quad i=1,2,\cdots,N_g$$

其中,系数 a_i 为非负数,表示为

$$a_i = -\frac{(\mathbf{v}_i^{(l)})^T \mathbf{G}_{v_i}}{\|\mathbf{G}_{v_i}\|^2} + \frac{\sqrt{[(\mathbf{v}_i^{(l)})^T \mathbf{G}_{v_i}]^2 - \|\mathbf{G}_{v_i}\|^2 (\|\mathbf{v}_i^{(l)}\|^2 - 1)}}{\|\mathbf{G}_{v_i}\|^2} \quad (23)$$

由上式可见,当 $\mathbf{v}_i^{(l)}$ 位于边界处且向量 $\mathbf{v}_i^{(l)}$ 与 \mathbf{G}_{v_i} 的夹角大于 90° ,即 $(\mathbf{v}_i^{(l)})^T \mathbf{v}_i^{(l)} = 1, (\mathbf{v}_i^{(l)})^T \mathbf{G}_{v_i} \leq 0$ 时,则 $a_i = 0, \mathbf{v}_i^{(l+1)} = \mathbf{v}_i^{(l)}$,即第 i 组的正则耦合区间变量在迭代前后相互重合,这会引起算法无法收敛的问题。二维正则耦合区间变量在迭代前后相互重合的示意图见图 2,因负梯度 $-\mathbf{G}_{v_i}$ 给出了目标函数局部极小值的方向,若 $-\mathbf{G}_{v_i}$ 指向可行域外部,则表明第 i 组的优化点可能位于边界。同时,结合式(15)给出的 KKT 条件,位于边界的优化点向量与 $-\mathbf{G}_{v_i}$ 相互重合。故当 $a_i = 0$ 时,式(22)被下式代替:

$$\mathbf{v}_i^{(l+1)} = -\frac{\mathbf{G}_{v_i}}{\|\mathbf{G}_{v_i}\|} \quad (24)$$

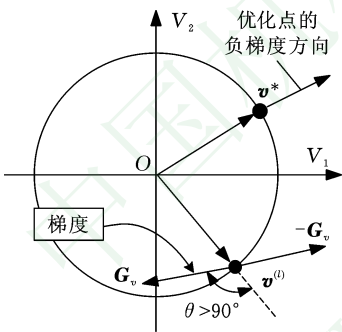


图 2 迭代点相互重合示意图

Fig.2 Two sequentially iterative points coincide

基于式(22)或式(24)获得新迭代点后,比较目标函数响应值。若 $g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)}) \leq g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})$,则判断是否满足 KKT 条件,若满足,则区间分析迭代停止,输出 $\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(l+1)}$;否则,令 $l \leftarrow l+1$,并基于式(22)或式(24)继续迭代计算。

若 $g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)}) > g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})$,则建立二阶多项式插值函数,搜索连接 $\mathbf{v}^{(l+1)}$ 与 $\mathbf{v}^{(l)}$ 线段内部的极小值。基于线段端点处信息,建立以下二阶多项式插值函数:

$$g_q(t) = a + bt + ct^2 \quad (25)$$

其中, t 表示线段内的位置参数,满足 $0 \leq t \leq 1$ 。令 t^* 为线段内局部优化点,则满足

$$t^* = -\frac{g'_q(0)}{2[g_q(1) - g_q(0) - g'_q(0)]} \quad (26)$$

$$g_q(0) = g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})$$

$$g'_q(0) = (\mathbf{v}^{(l+1)} - \mathbf{v}^{(l)})^T \nabla g_v(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l)})$$

$$g_q(1) = g(\mathbf{u}^{(k+1)}, \mathbf{v}^{(l+1)})$$

则对应 t^* 的迭代点为

$$\mathbf{v}^{(l+1)} = (\mathbf{v}^{(l+1)} - \mathbf{v}^{(l)})t^* + \mathbf{v}^{(l)} \quad (27)$$

检查 $\mathbf{v}^{(l+1)}$ 是否满足 KKT 条件,若满足则迭代停止,输出 $\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(l+1)}$;否则,令 $l \leftarrow l+1$,并基于式(22)或式(24)继续迭代。区间分析算法的流程图见图 3。

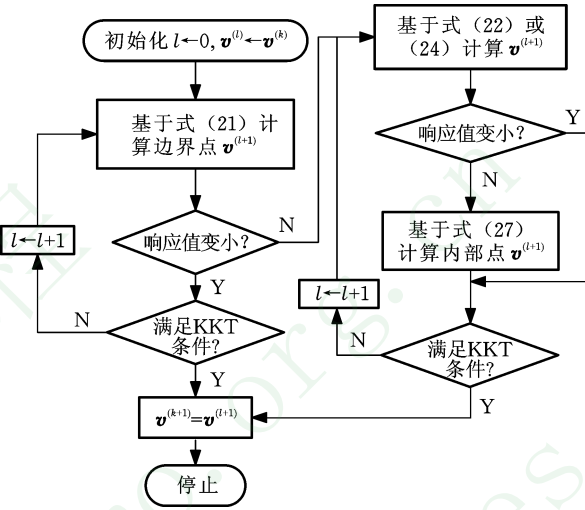


图 3 区间分析算法流程图

Fig.3 Flowchart of the proposed interval analysis algorithm

4 算例

本文采用两个算例来验证提出的混合可靠性分析方法的精度与计算效率。分析方法中,采用有限差分法计算极限状态函数的梯度,并采用调用极限状态函数的次数来评定分析方法的计算效率。

为验证提出的区间分析算法的计算效率,在算例中对本文方法与 FORM-UUA 方法进行比较分析。虽然 FORM-UUA 方法被提出时用于处理独立区间变量,但该方法在区间分析中采用了常规非线性优化算法序列二次规划法,用于求解关于区间变量的极值优化问题,故该方法同样适用于耦合区间变量。

4.1 连杆滑块机构

对文献[1]中的连杆滑块机构算例作适当修改,用于验证本文方法的计算精度与效率。如图 4 所示,滑块受到水平力 p 作用,当连杆最大应力超出材料许用应力 S 时,连杆滑块机构失效,则极限状态函数可表示为

$$g = S - \frac{4p(l_2 - l_1)}{\pi(\sqrt{(l_2 - l_1)^2 - e^2} - \mu e)(d_2^2 - d_1^2)}$$

其中, l_1 为曲柄长度; l_2 为连杆长度; d_1, d_2 分别为圆筒连杆的内外径; S, p, l_1, l_2 为随机变量,其分布参数见表 1。

表 1 随机变量分布参数

变量	分布类型	均值	标准差
$S(\text{MPa})$	正态	290	29
$p(\text{N})$	正态	28 000	2 800
$l_1(\text{mm})$	正态	100	0.01
$l_2(\text{mm})$	正态	300	0.02

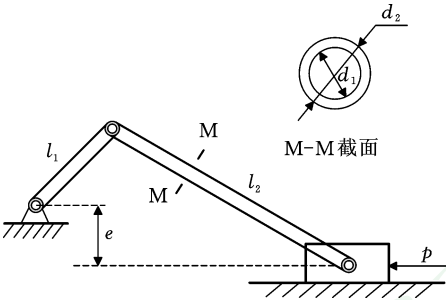


图 4 连杆滑块机构

Fig.4 A crank-slider mechanism

因机构安装地点不定,偏移量、滑块与地面的摩擦因数被设为区间变量,而圆筒连杆的内外径设为耦合区间变量,则多椭球模型为

$$y_1 \in \left\{ y_1 : \frac{(y_1 - 130)^2}{100} \leq 1 \right\} \quad y_2 \in \left\{ y_2 : \frac{(y_2 - 0.2)^2}{0.05^2} \leq 1 \right\}$$
$$y_3 \in \left\{ y_3 : [y_3 - 22 \ y_4 - 30] \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 - 22 \\ y_4 - 30 \end{bmatrix} \leq 1 \right\}$$
$$\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4]^T = [e \ \mu \ d_1 \ d_2]^T$$
$$\mathbf{Y}_3 = [Y_3 \ Y_4]^T$$

由蒙特卡洛法、FOMR-UUA 方法与本文方法计算得到的最大失效概率见表 2。使用蒙特卡洛法时,将耦合区间变量的区间划分为 50 等份,在每种满足可行域的耦合区间变量组合下,对随机变量作 10^6 次抽样,计算失效概率,挑选出最大值为最大失效概率。以蒙特卡洛法的计算结果为参照,FORM-UUA 方法与本文方法在相同的迭代步下均得到了较准确的结果。然而,由调用极限状态函数的次数 N_c 可见,本文方法比 FORM-UUA 方法效率高。

表 2 最大失效概率

计算方法	$P_{f \max}$	N_c	k
蒙特卡洛法	0.018 5	—	—
FORM-UUA	0.019 5	358	4
本文方法	0.019 5	57	4

为进一步分析提出的区间分析算法的有效性,在迭代步 $k=0$ 时,区间分析算法的历史迭代记录见表 3,表 3 中最后一列表示迭代点是否满

足 KKT 条件,数值为 0 则表示不满足,为 1 则表示满足。可见,正则耦合区间变量优化点位于可行域边界,满足优化点位于边界点的假设,因此,本文区间分析算法仅需较少的迭代就可快速求得优化点,计算效率较高。

表 3 区间分析算法历史迭代记录

l	$\mathbf{v}^{(l)}$	$g(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(l)})$	是否满足 KKT 条件
0	$[0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$	-0.00	0
1	$[1.000 \ 1.000 \ 0.826 \ -0.563]^T$	-95.48	0
2	$[1.000 \ 1.000 \ 0.849 \ -0.528]^T$	-95.56	1

4.2 悬臂圆筒

通过修改文献[1]中的悬臂圆筒算例,验证本文可靠性分析方法。如图 5 所示,悬臂圆筒受到外力 F_1 、 F_2 、 p 与扭矩 T 。当圆筒最大 von-Mises 应力 σ_{\max} 超出材料屈服强度 S_y 时悬臂圆筒失效,则极限状态函数为

$$G = g(X, Y) = S_y - \sigma_{\max}$$

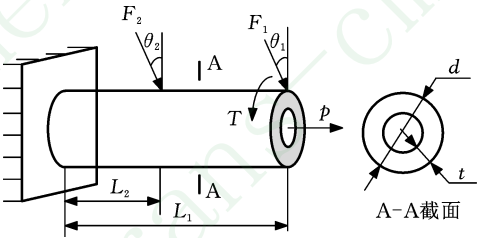


图 5 悬臂圆筒

Fig.5 A cantilever tube

最大 von-Mises 应力 σ_{\max} 位于悬臂圆筒支撑附近,计算公式为

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2}$$
$$\sigma_x = \frac{p + F_1 \sin\theta_1 + F_2 \sin\theta_2}{A} + \frac{Mc}{I}$$
$$M = F_1 L_1 \cos\theta_1 + F_2 L_2 \cos\theta_2$$
$$A = \frac{\pi}{4} [d^2 - (d - 2t)^2] \quad c = d/2$$
$$I = \frac{\pi}{64} [d^4 - (d - 2t)^4]$$
$$\tau_{zx} = Td/(2J) \quad J = 2I$$

式中, L_1 为圆筒长度; L_2 为外力 F_2 作用点距悬臂圆筒根部的距离。

随机变量的分布函数参数见表 4。因信息量不足,力的角度 θ_1 与 θ_2 (单位为度)设为耦合区间变量,其多椭球模型为

$$y \in \mathbf{S} = \left\{ y : [y_1 - 4 \ y_2 - 8] \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - 4 \\ y_2 - 8 \end{bmatrix} \leq 1 \right\}$$
$$\mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2]^T = [\theta_1 \ \theta_2]^T$$

由蒙特卡洛法、FORM-UUA 与本文方法计算得到的结果见表 5。由表 5 可见,FORM-UUA 方法与本文方法的精度均较高,但本文方法比 FORM-UUA 方法的效率有较大幅度的提高。

表 4 随机变量分布参数

Tab. 4 Distribution parameters of random variables

变量	分布类型	均值	标准差
$t(\text{mm})$	正态	5	0.1
$d(\text{mm})$	正态	42	0.5
$L_1(\text{mm})$	均匀	120	0.020 8
$L_2(\text{mm})$	均匀	60	0.020 8
$F_1(\text{N})$	正态	3 000	300
$F_2(\text{N})$	正态	3 000	300
$p(\text{N})$	冈贝尔	12 000	1 200
$T(\text{N} \cdot \text{m})$	正态	90	9
$S_y(\text{MPa})$	正态	220.0	22.0

表 5 最大失效概率

Tab.5 The maximum probability of failure

分析方法	$P_{f\max}$	N_c	k
蒙特卡洛法	1.68×10^{-4}	—	—
FORM-UUA	1.63×10^{-4}	84	4
本文方法	1.63×10^{-4}	64	4

同理,在迭代步 $k=0$ 时,区间分析算法的历史迭代记录见表 6。由表 6 可见,正则耦合区间变量优化点位于可行域内部,未满足优化点位于边界点的假设,因此,区间分析算法在迭代步 l 为 3、5 时调用了二阶多项式插值法,用于搜索位于可行域内部的优化点,并在 $l=5$ 时求得优化点。

表 6 区间分析算法历史迭代记录

Tab.6 Iteration history of interval analysis algorithm

l	$\mathbf{v}^{(l)}$	$\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(l)})$	是否满足 KKT 条件
0	$[0 \ 0]^T$	-0.256 4	0
1	$[-0.64 \ -0.77]^T$	-0.226 7	0
2	$[-0.64 \ -0.77]^T$	-0.226 7	0
3*	$[-0.05 \ -0.06]^T$	-0.256 6	0
4	$[0.72 \ -0.70]^T$	-0.218 6	0
5*	$[-0.03 \ -0.08]^T$	-0.256 7	1

注: * 表示由二阶多项式插值函数获得。

5 结论

算例结果表明,相比已有算法,本文耦合区间-随机混合可靠性分析方法具有更高的计算效率,提出的区间分析算法可明显提高混合可靠性分析的整体计算效率,并且该方法可适应于耦合区间变量与独立区间变量,应用范围较广。

参考文献:

[1] DU Xiaoping. Unified Uncertainty Analysis by the First Order Reliability Method[J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(9): 091401.

[2] 刘帅杰,段宝岩,杨东武. 利用区间与概率的星载可展天线齿轮防卡分析[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版), 2016, 43(3): 61-66.

LIU Shuaijie, DUAN Baoyan, YANG Dongwu. Interval and Probability Based Analysis of Seizure-preventing for Synchronous Gears of the Astromesh Deployable Satellite Antenna[J]. Journal of Xidian University(Natural Science), 2016, 43(3): 61-66.

[3] 刘海波,姜潮,郑静,等. 含概率与区间混合不确定性的系统可靠性分析方法[J]. 力学学报, 2017, 49(2): 456-466.

LIU Haibo, JIANG Chao, ZHENG Jing, et al. A System Reliability Analysis Method for Structures with Probability and Interval Mixed Uncertainty[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(2): 456-466.

[4] LUO Y, KANG Z, LI A. Structural Reliability Assessment Based on Probability and Convex Set Mixed Model[J]. Computers & Structures, 2009, 87(21/22): 1408-1415.

[5] 潘柏松,谢少军,DU Xiaoping,等. 随机变量和非独立区间变量下的可靠性序列迭代算法[J]. 中国机械工程, 2015, 26(12): 1569-1575.

PAN Baisong, XIE Shaojun, DU Xiaoping, et al. A Sequential Iteration Algorithm for Reliability Analysis with Random and Dependent Interval Variables [J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(12): 1569-1575.

[6] HOHENBICHLER M, RACKWITZ R. Non-normal Dependent Vectors in Structural Safety [J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1981, 107(6): 1127-1138.

[7] DITLEVSEN O. Principle of Normal Tail Approximation[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1981, 107(6): 1191-1209.

[8] RACKWITZ R, FLESSLER B. Structural Reliability under Combined Random Load Sequences [J]. Computers & Structures, 1978, 9(5): 489-494.

[9] HASOFER A M, LIND N C. Exact and Invariant Second-moment Code Format[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1974, 100(1): 111-121.

[10] BEN-HAIM Y. Convex Models of Uncertainty: Applications and Implications[J]. Erkenntnis, 1994, 41(2): 139-156.

稍大以外,其余 9 次测量的差值均小于 2%。在角度方面,只有线段 AN、NM 的个别次测量相对差值超过了 2%,而 GF 和 FE 两条线段的差值均在 1%以内。

4 结论

在提取特征点时,本文算法不需要迭代,减小了计算工作量,而且对阈值不敏感,也减小了计算的难度。实验结果表明,本文算法在扫描点分割方面可以获得与手工分割相同的结果;与测量值对比,提取的特征线段也可获得较高的准确度。

参考文献:

[1] KLIMENTJEW D, ARLI M, ZHANG J. 3D Scene Reconstruction Based on a Moving 2D Laser Range Finder for Service-robots[C] // IEEE International Conference on Robotics & Biomimetics, Guilin, 2009;1-5.

[2] OGAZ M, SANDOVAL R, CHACON M. Data Processing from a Laser Range Finder Sensor for the Construction of Geometric Maps of an Indoor Environment [C] // IEEE International Midwest Symposium on Circuits & Systems. Cancun, 2009; 1-5.

[3] NGUYEN V, GÄCHTER S, MARTINELLI A, et al. A Comparison of Line Extraction Algorithms Using 2D Range Data for Indoor Mobile Robotics [J]. Autonomous Robots, 2007, 23(2): 97-111.

[4] CHOI Y H, LEE T K, OH S Y. A Line Feature Based SLAM with Low Grade Range Sensors Using Geometric Constraints and Active Exploration for Mobile Robot[J]. Autonomous Robots, 2008, 24 (1): 13-27.

[5] FERNANDES L A F, OLIVEIRA M M. Real-time Line Detection through an Improved Hough Transform Voting Scheme[J]. Pattern Recognition, 2008,

41: 299-314.

[6] 满增光, 叶文华, 楼佩煌, 等. 基于分开-合并的激光雷达距离图像特征提取 [J]. 中国机械工程, 2011, 22(19): 2303-2306.

MAN Zengguang, YE Wenhua, LOU Peihuang. Feature Extraction Based on Split-merge in Range Image of LIDAR [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(19): 2303-2306.

[7] 曲丽萍, 王宏健, 边信黔. 基于距离聚类的圆柱类实体路标特征提取算法[J]. 探测与控制学报, 2013, 35(1): 43-49.

QU Liping, WANG Hongjian, BIAN Xinqian. Feature Extraction of Circular Landmark Based Numerical Inference and Geometric Analysis[J]. Journal of Detection & Control, 2013, 35(1): 43-49.

[8] 薛金林, 张顺顺. 基于激光雷达的农业机器人导航控制研究[J]. 农业机械学报, 2014, 45(9): 55-60.

XUE Jinlin, ZHANG Shunshun. Navigation of an Agricultural Robot Based on Laser Radar[J]. Transaction of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(9): 55-60.

[9] CADENA C, CARLONE L, CARRILLO H, et al. Past, Present, and Future of Simultaneous Localization and Mapping: toward the Robust-perception Age[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2016, 32 (6): 1309-1332.

[10] 谢自强, 葛为民, 王肖锋, 等. 发展型机器人实时特征提取方法研究[J]. 机器人, 2017, 39(2): 189-196.

XIE Ziqiang, GE Weimin, WANG Xiaofeng, et al. Real Time Feature Extraction Method of Developmental Robot[J]. Robot, 2017, 39(2): 189-196.

(编辑 陈 勇)

作者简介:刘朋,男,1980年生,讲师、博士研究生。研究方向为自主机器人定位与导航。E-mail:liupeng@sust.edu.cn。任工昌(通信作者),男,1962年生,教授、博士研究生导师。研究方向为产品创新理论、机电设备实时监控、CAD、机构综合和工业设计。

(上接第 1678 页)

[11] BEN-HAIM Y, ELISHAKOFF I. Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics[M]. Amsterdam: Elsevier, 1990.

[12] 潘柏松, 谢少军, 蒋立正. 非独立区间变量和随机变量下的单步可靠性计算方法[J]. 中国机械工程, 2016, 27(18): 2430-2436.

PAN Baisong, XIE Shaojun, JIANG Lizheng. An One-step Reliability Analysis Method with Random and Dependent Interval Variables [J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27 (18): 2430-

2436.

[13] GONG Jinxin, YI Ping. A Robust Iterative Algorithm for Structural Reliability Analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 43 (4): 519-527.

(编辑 陈 勇)

作者简介:谢少军,男,1986年生,博士后研究人员。研究方向为可靠性设计方法、可靠性工程。潘柏松(通信作者),男,1968年生,教授、博士研究生导师。研究方向为可靠性设计。E-mail: panbsz@zjut.edu.cn.