

一种零耦合度三平移并联机构的设计及运动学

沈惠平 吴成琦 许 可 赵迎春 杨廷力
常州大学现代机构学研究中心,常州,213016

摘要:根据基于方位特征方程的并联机构拓扑设计理论和方法,设计出一种零耦合度且运动解耦的非对称三平移输出的并联机构($RP_a \parallel 3R)2R+RP_a$),分析了该并联机构的方位特征、自由度、耦合度 κ 等主要拓扑特性。由于该机构耦合度 $\kappa=0$,因此直接导出其解析式位置正解。通过位置反解,分析计算了机构的工作空间及奇异性特性。由 Jacobian 矩阵导出了机构动平台质心的速度与加速度计算公式,并给出了其仿真曲线。

关键词:并联机构;运动学;耦合度;工作空间;奇异性

中图分类号:TH12

DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2019.06.005

开放科学(资源服务)标识码(OSID):



Design and Kinematics of 3-translation Parallel Mechanisms with Zero Coupling Degree

SHEN Huiping WU Chengqi XU Ke ZHAO Yingchun YANG Tingli

Research Center of Advanced Mechanism, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu, 213016

Abstract: According to the topology design theory based on position and orientation characteristic (POC) equations, a new asymmetric 3T PM ($RP_a \parallel 3R)2R+RP_a$ with zero coupling degree and decoupled motions was designed. The main topological characteristics such as POC, degree of freedom, and coupling degree were calculated. Workspace and singularity of the PM were analyzed based on inverse position solutions of the PM. Velocity and acceleration of the center of mass of the PM were obtained by Jacobian matrix, and simulation curves of velocity and acceleration was put forward.

Key words: parallel mechanism(PM); kinematics; coupling degree; workspace; singularity

0 引言

三自由度的三平移(3T)并联机构因结构简单、控制不复杂而有较高实用价值^[1],很多学者对 3T 并联机构及其操作手进行了研究分析。VISCHER 等^[2]设计了三维平移 Delta 机构;还有一些学者研究了基于 Delta 机构的衍生机构——操作手^[3-5]; TSAI 等^[6]提出一种由移动副驱动、支链含 4R 平行四边形机构的三自由度移动机构;李仕华等^[7-8]设计出 3-UPU 型三平移机构,并对该机构的瞬时运动学性能进行了分析;赵铁石等^[9]、尹小琴等^[10]给出了 3-RRC 型三平移机构的位置正反解方程;ZHAO^[11]考虑运动学的各向异性,对一种 3T 并联机构进行了尺度综合及运动学研究;ZENG 等^[12-13]、LEE 等^[14]对一种三平移 Tri-pyramid 并联机构位置方程的正反解、雅可比矩阵、各向同性等运动学特性进行了分析;BHUTANI 等^[15]通过对 3-UPU 型机构的数学模型和设计要素进行分析,提出了一种新的设计方

案;LI^[16]等研究了运动解耦的 3T 机构。

但是,上述三平移机构存在两大问题:①机构耦合度 κ 不为零,即 $\kappa \geq 1$,因此,一般得不到位置正解的解析解,而只能得到数值解;②不具有输入-输出运动解耦特性^[17],运动控制及轨迹规划等较为复杂,给应用带来了不便。

根据基于方位特征(position and orientation characteristic,POC)方程的并联机构拓扑结构设计理论和方法^[18],笔者设计出一种新的 3T 并联机构。该机构耦合度为零,可得其位置正解的解析解;同时,该机构具有部分运动解耦,机构的运动控制及轨迹规划较容易。此外,本文还对该机构的奇异位形、工作空间,以及动平台质心的速度、加速度的变化规律进行了分析。

1 并联机构的设计

如图 1 所示,本文提出的 3T 并联机构由动平台 1、静平台 0 和 2 条混合单开链(hybrid single opened chain,HSOC)组成。

第 1 条混合支链包含支链(HSOC₁) I、II,静平台 0 通过转动副 R₁₁连接构件 2 的一端,构件 2 的另一端固定连接由 4 个球副(S_a、S_b、S_c、S_d)组

收稿日期:2017-10-09
基金项目:国家自然科学基金资助项目(51375062,51475050);
江苏省科技成果转化专项资金资助项目(BA2015098);江苏省
绿色过程装备重点实验室资助项目

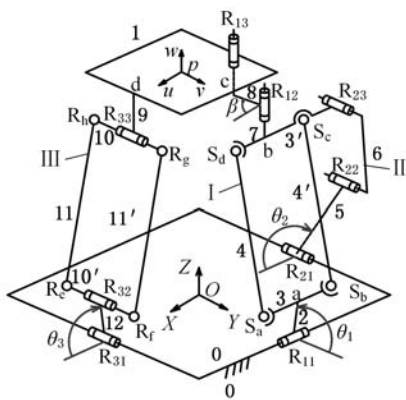


图 1 3T 并联机构

Fig.1 3T Parallel Mechanism

成的平行四边形 P_a^{4S} 的短边杆 3; 构件 3' 和短边杆 3 个平行转动副 ($R_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23}$) 并联构成一个子并联机构 $RP_a^{4S} \perp 3R$; 同时, 构件 3' 通过 2 个平行转动副 ($R_{12} \parallel R_{13}$) 串联后连接于动平台 1; 此外, 静平台 0 上的转动副 R_{11} 、 R_{21} 互相垂直, 转动副 R_{12} 的轴线垂直于动平台 1 的平面。第 1 条混合单开链 $HSOC_1$ 记作 $(RP_a^{4S} \parallel 3R) \perp 2R$, 该混合支链末端为动平台 1 的一部分, 产生三平移和一转动。

第 2 条混合支链 $HSOC_2$ 即支链 III 通过静平台上的转动副 R_{31} 连接一个平行的转动副 R_{32} 后, 再串联由 4 个 R 副 (R_e 、 R_f 、 R_g 、 R_h) 组成的平行四边形 P_b^{4S} , 最后, 通过平行轴线的转动副 R_{33} 连接于动平台。支链 III 记作 RP_b^{4S} , 其末端产生三平移和一个绕 R_{33} 轴的转动。显然, 混合单开链 $HSOC_2$ 和典型 Delta 机构中的支链相同, 但典型 Delta 机构包含 3 条这样的混合支链。

2 拓扑特性分析

2.1 机构的 POC 分析

串联、并联机构的 POC 方程^[18]分别为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中, M_{ji} 为第 i 个运动副的 POC 集; M_{bi} 为第 i 个支链末端的 POC 集; M_{Pa} 为机构动平台的 POC 集。

机构的 POC 集分析过程如下:

(1) 设定机构的两条复杂支链的拓扑结构分别为 $HSOC_1 \{ R_{11} (-P^{4S}-P^{4S}-R^{4S}-R^{4S}) \perp (R_{23} \parallel R_{22} \parallel R_{21}) R_{12} \parallel R_{13} \}$ 和 $HSOC_2 \{ R_{31} (P^{4S}) \parallel R_{32} \parallel R_{33} \}$ 。

(2) 选定动平台上任意一点为基点 O' 。

(3) 确定两混合支链末端构件的 POC 集:

$$M_{HSOC1} = \left(\begin{bmatrix} t^1 (\perp R_{11}) \\ r^1 (\parallel R_{11}) \end{bmatrix} \cup \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} t^1 (\parallel \diamond (abcd)) \cup t^1 (\perp (ab)) \\ r^1 (\parallel (ab)) \cup r^1 (\perp (bd)) \end{bmatrix} \right) \cap$$

$$\begin{bmatrix} t^2 (\perp R_{23}) \\ r^1 (\parallel R_{21}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 (\perp R_{12}) \\ r^1 (\parallel R_{12}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (\parallel R_{12}) \end{bmatrix}$$

$$M_{HSOC2} = \begin{bmatrix} t^1 (\perp R_{31}) \\ r^1 (\parallel R_{31}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1 (\perp R_{32}) \\ r^1 (\parallel R_{32}) \end{bmatrix} \cup$$

$$\begin{bmatrix} t^1 (\perp R_{33}) \\ r^1 (\parallel R_{33}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1 (\parallel R_{32}) \\ r^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 (\parallel R_{31}) \end{bmatrix}$$

(4) 确定动平台的 POC 集:

$$M = M_{HSOC1} \cap M_{HSOC2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^0 \end{bmatrix}$$

可知, 该并联机构动平台一直产生纯三维移动。

2.2 机构的自由度计算

并联机构的全周自由度公式^[18]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^v \xi_{Lj} = \dim \{ (\bigcap_{i=1}^j M_{bi}) \cup M_{b(j+1)} \} \quad (4)$$

式中, F 为机构自由度; f_i 为第 i 个运动副的自由度; m 为运动副数; v 为独立回路数, $v = m - n + 1$; n 为构件数; ξ_{Lj} 为第 j 个独立回路的独立位移方程数; $\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ 为前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集; $M_{b(j+1)}$ 为前 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集。

2.2.1 确定独立位移方程数

该机构可分解为 2 个独立回路, 它们的独立位移方程数计算如下:

(1) 由支链 I、II 组成的第 1 个独立回路为 $HSOC_1 \{ R_{11} (P^{4S}-P^{4S}-R^{4S}-R^{4S}-R_{23}-R_{22}-R_{21}) \}$ 。由式(2)可得子并联机构 $RP_a^{4S} \perp 3R$ 的 POC 集:

$$M_{Pa(1-2)} = M_I \cap M_{II} =$$

$$\dim \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 (\perp R_{21}) \\ r^1 (\parallel R_{21}) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix}$$

由式(3)可得该子并联机构的自由度:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} = 8 - 6 = 2$$

由式(4)可得该子并联机构的独立位移方程数:

$$\xi_{L1} = \dim \{ M_I \cap M_{II} \} =$$

$$\dim \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 (\perp R_{21}) \\ r^1 (\parallel R_{21}) \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\} = 6$$

可见, 子并联机构的输出杆 3' 在 XOZ 平面内产生二维平移运动, 且仅由静平台 0 上的驱动副 R_{11} 、 R_{21} 决定, 因此, 该机构具有部分运动解耦性。

(2) 子并联机构 $RP_a^{4S} \perp 3R$ 与子串 $R_{12} \parallel R_{13}$ 以及支链 III 组成第 2 个回路 $HSOC_2 \{ R_{31} (P^{4S}) \parallel R_{32} \parallel R_{33} \perp R_{13} \parallel R_{12} \}$, 由式(4)可得

$$\begin{aligned} \xi_{L2} &= \dim\left\{\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{13}) \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cup M_{\text{III}}\right\} = \\ \dim\left\{\begin{bmatrix} t^2(\perp R_{13}) \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{31}) \end{bmatrix}\right\} = \\ \dim\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{13}, R_{31})) \end{bmatrix}\right\} &= 5 \end{aligned}$$

2.2.2 确定机构的自由度

由式(3)可得机构自由度:

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{Lj} = (8+6) - (6+5) = 3$$

计算机机构的自由度时,可将该机构视为仅由 2 条复杂支链组成的一个独立回路 $SOC\{P^*-P^*-R_{12}-R_{13}-R_{33}-P^{+R}-R_{32}-R_{31}\}$,则由式(4)得其独立位移方程数:

$$\begin{aligned} \xi_{L2} &= \dim\{M_{I-II} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cup M_{\text{III}}\} = \\ \dim\left\{\begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_{13}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_{33}) \end{bmatrix}\right\} = \\ \dim\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel (R_{13}, R_{31})) \end{bmatrix}\right\} &= 5 \end{aligned}$$

由式(3)可得 $F=8-5=3$ 。显然,自由度计算时将含回路的子并联机构用等效支链代替,计算过程比较清晰。

2.3 机构的耦合度计算

2.3.1 耦合度的定义

由基于序单开链(single opened chain, SOC)单元的机构组成原理知,任意机构可分解为若干个基本运动链(basic kinematics chain, BKC);独立回路数为 v 的 BKC 可进一步分解为 v 个 $SOC(\Delta_j)$ ($j=1, 2, \dots, v$),第 j 个单开链 SOC_j 的约束度 Δ_j 定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \zeta_{Lj} \tag{5}$$

式中, m_j 为第 j 个 SOC_j 的运动副数; f_i 为第 i 个运动副的自由度; I_j 为第 j 个 SOC_j 的驱动副数。而其耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \min\left\{\sum_{j=1}^v \left|\sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \zeta_{Lj}\right|\right\} \tag{6}$$

耦合度 κ 反映了机构各独立回路运动变量之间的关联和依赖程度,反映了机构运动学、动力学问题求解的复杂性, κ 越大,机构运动学、动力学问题求解的复杂度越高;对于 $\kappa=0$ 的机构,可以直接求出每个 BKC 的位置,从而得到位置正向解析解; $\kappa>0$ 意味着机构中至少有一个 BKC 的回路运动位置量需由多个回路方程联立求解,才能求得其位置正解。

2.3.2 耦合度计算

独立回路 $HSOC_1$ 、 $HSOC_2$ 的独立位移方程数 $\zeta_{L1}=6$, $\zeta_{L2}=5$, 因此,约束度为

$$\Delta_1 = \sum f_i - I_1 - \zeta_{L1} = (5+3) - 2 - 6 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum f_i - I_2 - \zeta_{L2} = 6 - 1 - 5 = 0$$

该 3T 并联机构包含 2 个耦合度均为 0 的 BKC,即 $\kappa_1=\kappa_2=0$, 因此,该机构的位置正解易由 BKC_1 、 BKC_2 直接求得解析解。

3 位置分析

3.1 结构参数标注及坐标系的建立

为理解方便,将图 1 所示机构展开为平面形式,如图 2 所示,静平台 0、动平台 1 均为正方形,边长分别为 $2l_1$ 、 $2l_2$;静平台 0 上的 3 个转动副 R_{11} 、 R_{21} 和 R_{31} 分布在各边的中点。

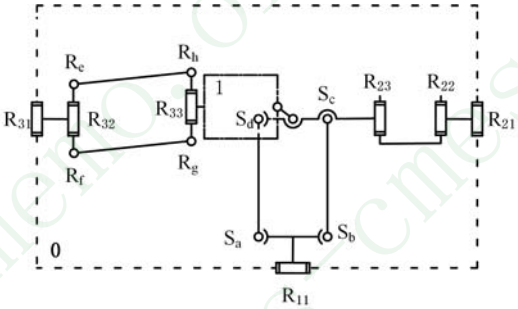


图 2 3T 并联机构的展开俯视图

Fig.2 Top view of 3T parallel mechanism

不失一般性,静坐标系 $OXYZ$ 建立在静平台 0 的几何中心,且 X 轴垂直于 R_{31} 的轴线, Y 轴垂直于 R_{11} 的轴线;动坐标系 $puvw$ 位于动平台 1 的中心, u 轴、 v 轴分别垂直平行于 R_{33} 的轴线, z 、 w 轴由右手法则确定。该 3T 并联机构的运动学建模如图 3 所示。

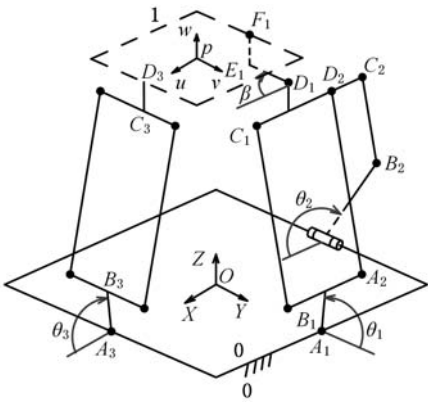


图 3 3T 并联机构的运动建模

Fig.3 Kinematic Modeling of 3T Parallel Mechanisms

设 $A_i B_i = l_3$, $B_i C_i = l_4$ ($i=1, 2, 3$), 其中, $l_3 < l_1$, $l_4 > l_3$; 两平行四边形的短边长均为 $2l_5$,

且点 B_1, B_3, C_1, C_3 均为短边上的中点, $C_2 D_2 = l_5, C_1 D_1 = C_3 D_3 = E_1 F_1 = l_6, D_1 E_1 = l_7$ 。

设 $A_1 B_1$ 与 Y 轴正向夹角为 θ_1 ; $A_2 B_2, A_3 B_3$ 与 X 轴正向夹角为 θ_2, θ_3 ; $D_1 E_1$ 与 X 轴正向夹角为 β 。

3.2 位置正解分析

机构位置正解求解过程可归结为:已知输入角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, 求动平台 1 上的中心点 p 点坐标。

3.2.1 BKC₁ 的位置求解

易知, 静平台上点 A_i, B_i 的坐标分别为 $A_1 = (0, l_1, 0), A_2 = (-l_1, 0, 0), A_3 = (l_1, 0, 0), B_1 = (0, l_1 + l_3 \cos \theta_1, l_3 \sin \theta_1), B_2 = (-l_1 + l_3 \cos \theta_2, 0, l_3 \sin \theta_2), B_3 = (l_1 + l_3 \cos \theta_3, 0, l_3 \sin \theta_3)$ 。

由 2.2 节可知, 机构运动过程中, 子并联机构的构件 3' 的输出运动始终为 XOZ 平面内的两维平移, 因此, $y_{C_1} = y_{C_2} = 0$ 。

由杆长约束 $B_1 C_1 = B_2 C_2 = l_4$, 得位置方程:

$$\left. \begin{aligned} (x_{C_1} - x_{B_1})^2 + (y_{C_1} - y_{B_1})^2 + (z_{C_1} - z_{B_1})^2 &= l_4^2 \\ (x_{C_2} - x_{B_2})^2 + (y_{C_2} - y_{B_2})^2 + (z_{C_2} - z_{B_2})^2 &= l_4^2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将式(7)中的两式相减, 得

$$\left. \begin{aligned} a_1 x_{C_1} + b_1 z_{C_1} &= c_1 \\ a_1 &= 2(x_{B_2} + 2l_5) \quad b_1 = 2(z_{B_2} - z_{B_1}) \\ c_1 &= (x_{B_2} + 2l_5)^2 + z_{B_2}^2 - y_{B_1}^2 - z_{B_1}^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

若 $a_1 = b_1 = 0$, 则 $c_1 = -z_{B_1}^2 = 0$ 不成立, 因此, a_1, b_1 不同时为零, 于是 $a_1 = 0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} z_{C_1} &= c_1 / b_1 \\ x_{C_1} &= \pm \sqrt{l_4^2 - (z_{B_1} - z_{C_1})^2 - y_{B_1}^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$a_1 \neq 0$ 时, 有

$$\left. \begin{aligned} z_{C_1} &= \frac{e_1 \pm \sqrt{e_1^2 - 4d_1 f_1}}{2d_1} \\ x_{C_1} &= \frac{c_1 - b_1 z_{C_1}}{a_1} \\ d_1 &= a_1^2 + b_1^2 \quad e_1 = 2(b_1 c_1 + z_{B_1} a_1^2) \\ f_1 &= a_1^2 (y_{B_1}^2 + z_{B_1}^2 - l_4^2) + c_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

3.2.2 BKC₂ 的位置求解

易求得点 D_1, E_1, F_1, D_3, C_3 的坐标分别为 $D_1 = (x_{C_1}, 0, z_{C_1} + l_6), E_1 = (x_{D_1} + l_7 \cos \beta, l_7 \sin \beta, z_{D_1}), F_1 = (x_{D_1} + l_7 \cos \beta, l_7 \sin \beta, z_{D_1} + l_6), D_3 = (x_{D_1} + l_7 \cos \beta + 2l_2, l_7 \sin \beta, z_{D_1} + l_6), C_3 = (x_{D_3}, y_{D_3}, z_{D_3} - l_6)$ 。由杆长约束 $B_3 C_3 = l_4$, 建立位置方程:

$$(x_{B_3} - x_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2 + (z_{B_3} - z_{C_3})^2 = l_4^2 \quad (11)$$

对(11)进行展开、整理, 得

$$a_2 \cos \beta = b_2 \quad (12)$$

$$a_2 = 2l_7(x_{D_1} - x_{B_3} + 2l_2)$$

$$b_2 = l_4^2 - l_7^2 - (x_{D_1} - x_{B_3} + 2l_2)^2 - (z_{D_1} - z_{B_3})^2$$

由式(12)求得 β 后, 即可由点 D_3, F_1 求得动平台上 p 点的坐标分量:

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_{D_3} + x_{F_1})/2 \\ y &= (y_{D_3} + y_{F_1})/2 \\ z &= (z_{D_3} + z_{F_1})/2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

3.3 位置逆解分析

机构位置逆解求解为:已知动平台 1 上的中心点 p 点坐标, 求输入角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 。

3.3.1 求输入角 θ_1, θ_2

根据点 D_1, E_1, F_1 的坐标 $F_1 = (x - l_2, y, z), E_1 = (x - l_2, y, z - l_6), D_1 = (x_{D_1}, 0, z - l_6)$, 由杆长约束 $D_1 E_1 = l_7$, 可求得

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= (x - l_2 + \sqrt{l_7^2 - y^2}, 0, z - l_6) \\ C_1 &= (x_{D_1}, 0, z_{D_1} - l_6) \\ C_2 &= (x_{D_1} - 2l_5, 0, z_{D_1} - l_6) \end{aligned} \right\}$$

再由杆长约束 $B_1 C_1 = B_2 C_2 = l_4$ 可得

$$\left. \begin{aligned} (x_{B_1} - x_{C_1})^2 + (y_{B_1} - y_{C_1})^2 + (z_{B_1} - z_{C_1})^2 &= l_4^2 \\ (x_{B_2} - x_{C_2})^2 + (y_{B_2} - y_{C_2})^2 + (z_{B_2} - z_{C_2})^2 &= l_4^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

进一步整理得

$$\theta_1 = 2 \arctan \frac{2l_3 z_1 \pm \sqrt{4z_1^2 l_3^2 - g_1 h_1}}{g_1} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} I &= 1, 2 \quad z_1 = z_{C_1} \quad z_2 = z_{C_2} \\ g_1 &= l_1^2 + l_3^2 - 2l_1 l_3 - l_4^2 + x_{C_1}^2 + z_{C_1}^2 \\ h_1 &= l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 - l_4^2 + x_{C_1}^2 + z_{C_1}^2 \\ g_2 &= l_1^2 - l_4^2 + 2l_1 l_3 + l_3^2 + 2l_1 x_{C_2} + 2l_3 x_{C_2} + x_{C_2}^2 + z_{C_2}^2 \\ h_2 &= l_1^2 - l_4^2 - 2l_1 l_3 + l_3^2 + 2l_1 x_{C_2} - 2l_3 x_{C_2} + x_{C_2}^2 + z_{C_2}^2 \end{aligned} \right\}$$

3.3.2 求输入角 θ_3

同理, 通过杆长约束 $B_3 C_3 = l_4$ 可得 $D_3 = (x + l_2, y, z), C_3 = (x + l_2, y, z - l_6)$ 。由杆长约束 $B_3 C_3 = l_4$, 建立位置方程:

$$(x_{B_3} - x_{C_3})^2 + (y_{B_3} - y_{C_3})^2 + (z_{B_3} - z_{C_3})^2 = l_4^2 \quad (16)$$

展开并整理式(16)得

$$\theta_3 = 2 \arctan \frac{2l_3 z_3 \pm \sqrt{4z_3^2 l_3^2 - g_3 h_3}}{g_3} \quad (17)$$

$$z_3 = z_{C_3}$$

$$g_3 = l_1^2 + l_3^2 - 2l_1 l_3 - l_4^2 + y_{C_3}^2 + z_{C_3}^2$$

$$h_3 = l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 - l_4^2 + y_{C_3}^2 + z_{C_3}^2$$

3.4 实例验算

参考 ABB 机器人 14R 的尺寸参数, 取该机构结构参数如下: $l_1 = 300 \text{ mm}, l_2 = 70 \text{ mm}, l_3 = 350 \text{ mm}, l_4 = l_8 = 800 \text{ mm}, l_5 = 100 \text{ mm}, l_6 = 10 \text{ mm}, l_7 = 50 \text{ mm}$ 。给定一组主动输入角: $\theta_1 =$

$61.87^\circ, \theta_2 = 135.05^\circ, \theta_3 = 45.67^\circ$ 。

由式(13),得动平台 1 上 p 点的两个位置(单位 mm,下同): $(59.30, 26.34, 969.42)$ 和 $(59.30, -26.34, 969.42)$ 。取坐标 $(59.30, 26.34, 969.42)$,该坐标对应的机构三维构型如图 4 所示。

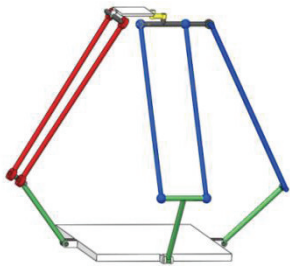


图 4 第一组坐标对应的机构构型

Fig.4 The configuration of the first set of coordinate

取 p 点坐标为 $(59.30, -26.34, 969.42)$,将其代入式(15)~式(17),得到 3 个输入角的 8 组逆解;其中的 1 组逆解为 $\theta_1 = 61.87^\circ, \theta_2 = 135.05^\circ, \theta_3 = 45.67^\circ$,这与正解中给定的 3 个已知输入角一致,因此,正反解求解正确。其余 7 组解都为机构位置反解的理论值,对应的机构装配构型不具有较好的实用价值,有机构稳定性较差、构件与静平台易干涉等问题。

4 工作空间分析

工作空间是衡量并联机构性能的重要指标之一。本文采用极限边界搜索算法搜索该机构的工作空间^[19]。首先,根据杆长来设定工作空间的搜索范围;然后,基于位置逆解,搜索所有满足杆长约束、转角约束、干涉约束的点,由这些点组成的三维图即为该并联机构的工作空间。

设定搜索范围为: $400\text{ mm} \leq z \leq 1\,200\text{ mm}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 1\,000\text{ mm}$, (θ, ρ) 分别为柱坐标系中的搜索角度和半径)。利用 MATLAB 得到该机构的工作空间及其各 X-Y 截面,如图 5、图 6 所示。由图 5、图 6 可知:①该并联机构的工作空间较大, $z \in [400\text{ mm}, 500\text{ mm}]$ 时,工作空间不连续,有空腔; $z \in [500\text{ mm}, 900\text{ mm}]$ 时,工作空间连续,为有效的操作工作空间。②该并联机构的工作空间关于 x 轴大致对称。

5 奇异位形分析

5.1 奇异位形概述

在奇异位置时,机构处于死点状态,不能继续运动或失去稳定,还会出现受力状态变坏,损坏机

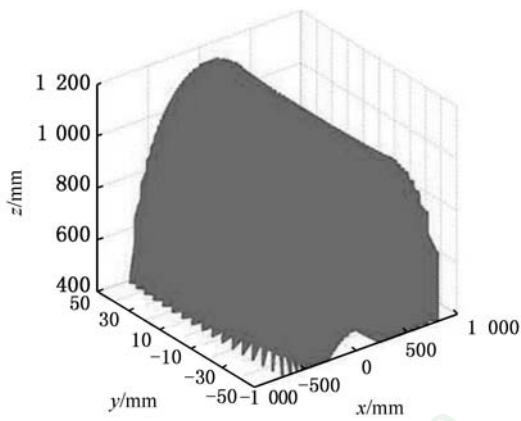


图 5 工作空间的三维立体图

Fig.5 Three-dimensional view of workspace

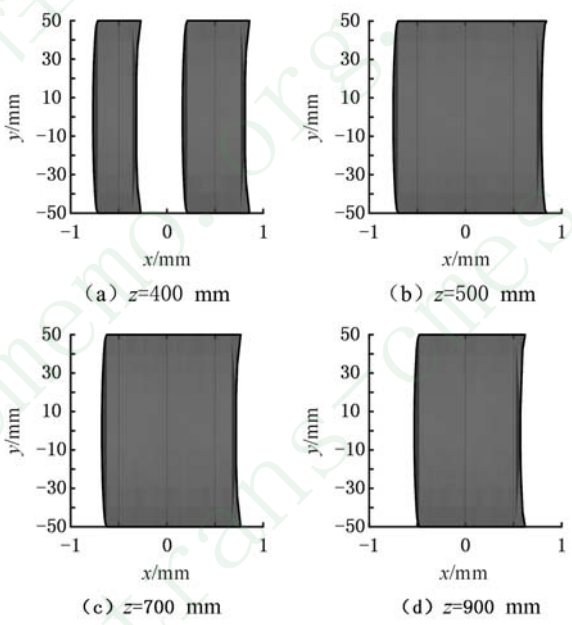


图 6 X-Y 截面图

Fig.6 X-Y cross-section

构,影响机构的正常工作。因此,识别机构的奇异位形,是并联机构设计与分析的重要内容之一,本文采用 Jacobian 代数法来分析该机构的奇异位形。

5.2 奇异位形分析方法

设机构动平台输出速度 $\mathbf{V} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T$,输入角速度 $\boldsymbol{\omega} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3]^T$,式(14)、式(16)的两边同时对时间 t 求导,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_p \mathbf{V} &= \mathbf{J}_q \boldsymbol{\omega} \tag{18} \\ \mathbf{J}_p &= \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} & \mathbf{J}_q &= \text{diag}(u_{11}, u_{22}, u_{33}) \\ f_{11} &= x_{B1} - x_{C1} & f_{13} &= z_{B1} - z_{C1} \\ f_{21} &= x_{B2} - x_{C2} & f_{23} &= z_{B2} - z_{C2} \\ f_{12} &= \pm \frac{(x_{B1} - x_{C1})y}{\sqrt{l_1^2 - y^2}} & f_{22} &= \pm \frac{(x_{B2} - x_{C2})y}{\sqrt{l_2^2 - y^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{31} &= x_{B3} - x_{C3} & f_{32} &= y_{B3} - y_{C3} & f_{33} &= z_{B3} - z_{C3} \\ u_{11} &= (z_{B1} - z_{C1})l_3 \cos\theta_1 - (y_{B1} - y_{C1})l_3 \sin\theta_1 \\ u_{22} &= (z_{B2} - z_{C2})l_3 \cos\theta_2 - (x_{B2} - x_{C2})l_3 \sin\theta_2 \\ u_{33} &= (z_{B3} - z_{C3})l_3 \cos\theta_3 - (x_{B3} - x_{C3})l_3 \sin\theta_3 \end{aligned}$$

5.2.1 第一类奇异

$\det \mathbf{J}_q = 0$ 时,发生第一类奇异。这意味着每个分支中靠近机架的 2 根杆折叠在一起或完全展开。在此位形下,动平台的自由度数减小。因此,可得 \mathbf{J}_q 的行列式的集合

$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \quad (19)$$

即 $\mathbf{J}_q = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, u_{33})$ 中的 u_{11} 或 u_{22} 或 u_{33} 为 0 对应有以下三种情形:① A_1, B_1, C_1 三点在 OYZ 平面上的投影共线时, $M_1 = \{(z_{B1} - z_{C1})l_3 \cdot \cos\theta_1 - (y_{B1} - y_{C1})l_3 \sin\theta_1 = 0\}$;② A_2, B_2, C_2 三点在 OXZ 平面上的投影共线时, $M_2 = \{(z_{B2} - z_{C2})l_3 \cos\theta_2 - (x_{B2} - x_{C2})l_3 \sin\theta_2 = 0\}$;③ A_3, B_3, C_3 三点在 OXZ 平面上的投影共线时, $M_3 = \{(z_{B3} - z_{C3})l_3 \cos\theta_3 - (x_{B3} - x_{C3})l_3 \sin\theta_3 = 0\}$, 其中, M_3 对应的三维模型如图 7 所示。

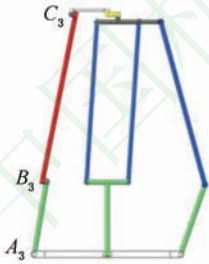


图 7 第一类奇异位形

Fig.7 Singularity of type 1

5.2.2 第二类奇异

$\det \mathbf{J}_p = 0$ 时,发生第二类奇异。这意味着所有主动构件锁住时,执行构件依然可以产生局部运动。在此位形下,动平台的自由度数增大。因此,可将矩阵 \mathbf{J}_p 看作 3 个行向量的组合即 $\mathbf{J}_p = [e_1 \ e_2 \ e_3]^T$, 若 $\det \mathbf{J}_p = 0$, 则 3 个向量存在下面两种情况:

(1) 2 个向量线性相关。若 $e_1 = k e_2$, 取 $[f_{12}$

$$f_{13}] = k[f_{22} \ f_{23}], \text{ 则 } k f_{21} = \pm k \frac{(x_{B2} - x_{C2})y}{\sqrt{l_2^2 - y^2}} \equiv$$

f_{11} 。此时, $B_1 C_1$ 向量和 $B_2 C_2$ 在 OXZ 平面上的投影平行, 其三维构型如图 8 所示。

(2) 3 个向量线性相关。若 $e_1 = k_1 e_2 + k_2 e_3$, 可得

$$f_{1I} = k_1 f_{2I} + k_2 f_{3I} \quad I = 1, 2, 3$$

$I = 3$ 时, $k_1 f_{23} + k_2 f_{33} = k_1 (z_{B2} - z_{C2}) + k_2 (z_{B3} - z_{C3}) \neq f_{13}$, 可知 3 个向量线性相关不成立。

(3) 第三类奇异。第三类奇异也被称为组合

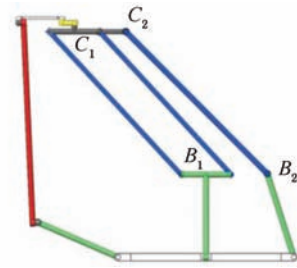


图 8 第二类奇异位形

Fig.8 Singularity of type 2

型奇异,其条件为 $\det \mathbf{J}_q = \det \mathbf{J}_p = 0$, 这意味着只有当第一类奇异和第二类奇异同时发生时才能产生,在此位形下,动平台将失去原有的运动特性。

因此,取 $u_{11} = 0, u_{22} = 0$ 或 $u_{33} = 0$ 代入第二类奇异分析,得 $\det \mathbf{J}_p$ 不为 0, 可知第二类奇异不成立。由于第一类奇异和第二类奇异不能同时发生,故该机构不存在第三类奇异。

6 速度与加速度分析

6.1 速度分析

机构非奇异时, \mathbf{J}_p 可逆, 由式(18)得动平台原点的输出速度:

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \boldsymbol{\omega} \quad (20)$$

6.2 加速度分析

进一步,对式(18)求导,易有

$$\mathbf{J}_p \dot{\mathbf{V}} - \mathbf{J}_q \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{K} = 0 \quad (21)$$

$$\mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$$

$$k_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta_1^2} \dot{\theta}_1^2 +$$

$$\dot{x} \dot{y} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \right) + \dot{z} \dot{\theta}_1 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta_1 \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial \theta_1} \right)$$

$$k_2 = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta_2^2} \dot{\theta}_2^2 +$$

$$\dot{\theta}_2 \dot{y} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta_2 \partial y} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial \theta_2} \right) + \dot{\theta}_2 \dot{z} \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial \theta_2 \partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial \theta_2} \right)$$

$$k_3 = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} \dot{z}^2 + \frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta_3^2} \dot{\theta}_3^2 +$$

$$\dot{\theta}_3 \dot{y} \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta_3 \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial \theta_3} \right) + \dot{\theta}_3 \dot{z} \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial \theta_3 \partial z} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial \theta_3} \right)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad \dot{z} = \frac{dz}{dt}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} \quad \dot{\theta}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} \quad \dot{\theta}_3 = \frac{d\theta_3}{dt}$$

当机构在非奇异位置时, \mathbf{J}_p 可逆, 则动平台原点的加速度为

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{J}_q \dot{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{J}_p^{-1} \mathbf{K} \quad (22)$$

6.3 算例验证

取输入角 $\theta_1 = \theta_3 = 15^\circ \cos t, \theta_2 = -15^\circ \cos t$ 。由式(20)~式(22), 用软件 MATLAB 计算得机

构动平台 1 的速度、加速度,如表 1、表 2 所示。

表 1 动平台的速度

Tab.1 Speed of the moving platform

时间(s)	v_x (mm/s)	v_y (mm/s)	v_z (mm/s)
2	5.081 8	24.658	-1.882
4	-9.641	20.007	3.515
6	-13.778	-4.651	4.879
8	-4.190 0	-24.658	1.599

表 2 动平台的加速度

Tab.2 Acceleration of moving platform

时间(s)	a_x (mm/s ²)	a_y (mm/s ²)	a_z (mm/s ²)
2	-7.381	4.647	2.702
4	-5.850	-8.868	2.036
6	2.063	-13.515	-0.660
8	6.278	-4.647	-2.344

同时,建立该机构的三维模型,并用 Solid-Works 导入到软件 Adams 中,仿真得到动平台的速度与加速度曲线,如图 9、图 10 所示。

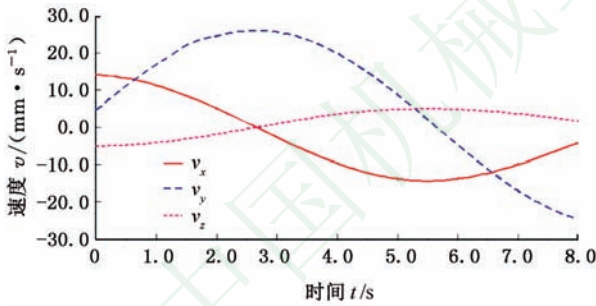


图 9 动平台的速度仿真曲线

Fig.9 Velocity simulation curve of moving platform

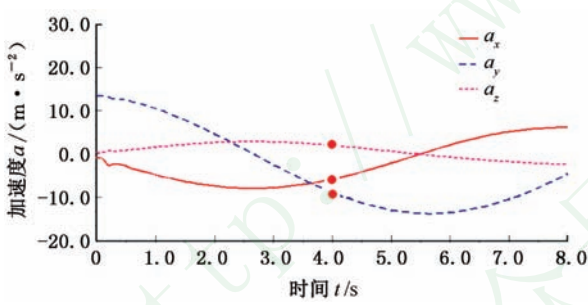


图 10 动平台的加速度仿真曲线

Fig.10 Acceleration simulation curve of moving platform

通过分别对比表 1、表 2 和图 9、图 10 发现:①基于 MATLAB 公式的计算值与 Adams 仿真曲线值完全一致。由表 2、图 10 可知, $t=4\text{s}$ 时,动平台 1 的加速度相等, $a_x=-5.850\text{ mm/s}^2$, $a_y=-8.868\text{ mm/s}^2$, $a_z=-2.036\text{ mm/s}^2$,从而验证了速度与加速度公式的正确性;②由图 9、图 10 可知,该机构速度与加速度曲线变化平稳,具有较好的动力学性能。

7 结论

(1)设计出一种耦合度为零且运动解耦的非

对称三平移并联机构,得到了该机构的位置正解及反解求解解析式。

(2)基于位置反解的机构工作空间分析表明,机构工作空间较大且对称,并给出了 3 种奇异位形发生的条件。

(3)机构的速度与加速度分析表明,该机构具有较好的动力学性能。

参考文献:

[1] 刘辛军,汪劲松,李剑锋,等. 一种新型空间 3 自由度并联机构的正反解及工作空间分析[J]. 机械工程学报, 2001, 37(10):36-39.
LIU Xinjun, WANG Jinsong, LI Jianfeng, et al. Positive and Negative Solutions and Workspace Analysis of a Novel 3-DOF Spatial Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2001, 37(10): 36-39.
[2] VISCHER P, CLAVEL R. Kinematic Calibration of the Parallel Delta Robot[J]. Robotica, 1998, 16 (2):207-218.
[3] STOCK M, MILLER K. Optimal Kinematic Design of Spatial Parallel Manipulators: Application to Linear Delta Robot[J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125(2):292-301.
[4] BOURI M, CLAVEL R. The Linear Delta: Developments and Applications[C]//2010 41st International Symposium on and 2010 6th German Conference on Robotics. Munich, 2010: 978-3-8007-3273-9.
[5] KELAIAIA R, COMPANY O, ZAATRI A. Multiobjective Optimization of a Linear Delta Parallel Robot[J]. Mechanism & Machine Theory, 2012, 50(2):159-178.
[6] TSAI L W, WALSH G C, STAMPER R E. Kinematics of a Novel Three DOF Translational Platform[J]. 1996, 4(4): 3446-3451.
[7] 李仕华,黄真. 一种特殊 3-UPU 并联平台机构瞬时运动特性[J]. 中国机械工程, 2005, 16 (18): 1641-1646.
LI Shihua, HUANG Zhen. Kinematic Characteristics of a Special 3-UPU Parallel Platform Manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16 (18):1641-1646.
[8] LI S, HUANG Z, ZUO R. Kinematics of a Special 3-DOF 3-UPU Parallel Manipulator [C]//ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Montreal, 2002: 1035-1040.

(下转第 671 页)

- 402-407.
- ZHU Wei, WANG Yuan, SHEN Huiping, et al. Design and Experiment of Compliant Parallel Humanoid Wrist Joint Polishing Robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(2):402-407.
- [13] 孙一兰,柳洪义,王品,等. 导弹弹体内壁打磨机器人及其运动轨迹规划[J]. 中国机械工程, 2009, 20(7):838-843.
- SUN Yilan, LIU Hongyi, WANG Pin, et al. Design of Missile Inner-wall Grinding Robot and Its Trajectory Planning[J]. China Mechanical Engineering, 2009, 20(7): 838-843.
- [14] NAHAVANDI S, UDDIN M J, NASU Y, et al. Automated Robotic Grinding by Low-powered Manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007, 23(5): 589-598.
- [15] 于靖军. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京:机械工业出版社, 2008.
- YU Jingjun. Mathematic Foundation of Mechanisms and Robotics[M]. Beijing: China Machine Press, 2008.
- [16] 王东伟,尚书旗,韩坤. 4HJL_2 型花生联合收获机摘果机构的设计与试验[J]. 农业工程学报, 2013, 29(14):15-25.
- WANG Dongwei, SHANG Shuqi, HAN Kun. Design and Test of Picking Mechanism in 4HJL-2 Peanut Combines[J]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2013, 29(14):15-25.
- (编辑 张 洋)
-
- 作者简介:崔国华,男,1975 年生,教授、博士研究生导师。研究方向为机器人学。发表论文 30 余篇。E-mail:ghcui@hebeu.edu.cn。刘 健(通信作者),男,1994 年生,硕士研究生。研究方向为机器人学。E-mail:1979267500@qq.com。
-
- (上接第 664 页)
- [9] 赵铁石,黄真. 一种三维移动并联平台机构的运动学分析[J]. 中国机械工程, 2001, 12(6):612-616.
- ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Kinematics Analysis of a Three-dimensional Mobile Parallel Platform Mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12 (6): 612-616.
- [10] 尹小琴,马履中. 三平移并联机构 3-RRC 的工作空间分析[J]. 中国机械工程, 2003, 14(18):1531-1533.
- YIN Xiaoqin, MA Lüzhong. Workspace Analysis of 3-RRC Parallel Mechanism with Three Translations[J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14 (18): 1531-1533.
- [11] ZHAO Y. Dimensional Synthesis of a Three Translational Degrees of Freedom Parallel Robot while Considering Kinematic Anisotropic Property [J]. Robotics and Computer-integrated Manufacturing, 2013, 29(1):169-179.
- [12] ZENG Qiang, EHMANN K, CAO Jian. Tri-pyramid Robot: Design and Kinematic Analysis of a 3-DOF Translational Parallel Manipulator [J]. Robotics & Computer-integrated Manufacturing, 2014, 30(6):648-657.
- [13] ZENG Qiang, EHMANN K, CAO Jian. Tri-pyramid Robot: Stiffness Modeling of a 3-DOF Translational Parallel Manipulator[J]. Robotica, 2016, 34(2):383-402.
- [14] LEE S, ZENG Q, EHMANN K F. Error Modeling for Sensitivity Analysis and Calibration of the Tri-pyramid Parallel Robot[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017 (5):1-14.
- [15] BHUTANI G, DWARAKANATH T A. Novel Design Solution to High Precision 3 Axes Translational Parallel Mechanism[J]. Mechanism & Machine Theory, 2014, 75(5): 118-130.
- [16] LI W, GAO F, ZHANG J. A Three-DOF Translational Manipulator with Decoupled Geometry [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2005.
- [17] 沈惠平,熊坤,孟庆梅,等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J]. 农业机械学报, 2016, 47(6):348-356.
- SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Design Method and Application of Motion Decoupling for Parallel Mechanisms[J]. Journal of Agricultural Machinery, 2016, 47 (6): 348-356.
- [18] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社, 2012.
- YANG Tingli, LIU Anxin, LUO Yufeng, et al. Topological Structure Design of Robot Mechanisms[M]. Beijing: Science Press, 2012.
- [19] 黄真,孔令富,方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京:机械工业出版社, 1997.
- HUANG Zhen, KONG Lingfu, FANG Yuefa. Theory and Control of Parallel Robot Mechanism [M]. Beijing: Machinery Industry Press, 1997.
- (编辑 张 洋)
-
- 作者简介:沈惠平,男,1965 年生,教授、博士研究生导师。研究方向为并联机构、机器人机构学。发表论文 250 余篇。E-mail:shp@126.com。