

# 用无网格法进行大变形柔性机构拓扑优化设计

杜义贤<sup>1</sup> 陈立平<sup>1</sup> 罗震<sup>2</sup>

1. 华中科技大学国家 CAD 支撑软件工程技术研究中心, 武汉, 430074

2. 香港中文大学, 香港

**摘要:**基于连续体结构的拓扑优化理论, 将无网格伽辽金数值方法引入分布式大变形柔性机构拓扑优化设计, 并解决了优化中的几何非线性问题。在优化问题中, 基于各向同性固体材料惩罚模型 (solidisotropic material with penalization, SIMP) 和折衷规划法, 同时考虑结构的柔性和刚度要求, 建立了柔性机构拓扑优化的多准则优化模型, 并利用优化准则法求解。采用无网格伽辽金法将求解域离散成节点, 避免了有限元方法在处理大变形问题时由于使用网格而产生网格畸变等问题。求解经典算例, 与基于线性理论的优化结果相比较分析, 说明了该方法的正确性和有效性。

**关键词:**柔性机构; 拓扑优化; 无网格法; 几何非线性; 优化准则

**中图分类号:** TH165

**文章编号:** 1004—132X(2008)02—0130—07

## Topology Optimization Design of Large—displacement Compliant Mechanisms Using Meshless Methods

Du Yixian<sup>1</sup> Chen Liping<sup>1</sup> Luo Zhen<sup>2</sup>

1. National CAD Support Software Engineering Research Center,

Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

2. The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong

**Abstract:** Based on the continuum structural topology optimization, the element—free Galerkin method was applied to design large—displacement compliant mechanisms with geometrical nonlinearities. The multi—criteria mathematical formulation was developed using the SIMP (solidisotropic material with penalization) interpolation scheme and compromise programming, in which the mechanical flexibility and structural stiffness were both considered as the prescribed performances to be optimized. The optimization formulation was solved by optimality criteria method. The element—free Galerkin method was employed to discretize the design domain with the aim of avoiding the undesired mesh distortion caused by adopting finite element methods to deal with geometrical nonlinear problems. Numerical examples have been presented to demonstrate the effectiveness of the proposed approaches by analyzing the results derived from linear and nonlinear cases, respectively.

**Key words:** compliant mechanism; topological optimization; meshless method; geometrical nonlinearity; optimality criteria

## 0 引言

柔性机构的出现为机构设计提供了新的、更好的设计方法和思路<sup>[1]</sup>。柔性机构是通过其部分或全部具有柔性的弹性变形来实现设计功能的一类机械, 一般分为集中式柔性机构和分布式柔性机构两种。伪刚体模型方法是集中式柔性机构设计的典型方法, 其设计结果是刚体构件与小部分柔性构件的组合, 整个机构只有局部柔性, 在小变形下有好的精度。分布式柔性机构设计则利用结构拓扑优化方法。Ananthasuresh 等<sup>[2]</sup>将连续体结构拓扑优化的均匀化方法引入到柔性机构设计中, 将柔性机构的机构设计同结构优化技术结合

起来, 开辟了分布式柔性机构设计的新途径。

目前, 利用拓扑优化方法进行柔性机构设计时, 大部分是基于结构线性理论的, 对拓扑优化中的非线性问题国内外研究较少。Jog<sup>[3]</sup>讨论了非线性热弹性变形问题的拓扑优化设计问题。Buhl 等<sup>[4]</sup>深入研究了利用拓扑优化进行几何非线性结构设计时出现的数值问题。Gea 等<sup>[5]</sup>也讨论了几何非线性结构的拓扑优化设计问题, 并得出了与 Buhl 相似的结论。Pedersen 等<sup>[6]</sup>和 Bruns 等<sup>[7]</sup>将几何非线性问题的拓扑优化设计方法引入柔性机构设计领域, 并对多种形式的大变形柔性机构设计问题进行了研究。Sigmund<sup>[8,9]</sup>利用几何非线性结构拓扑优化方法, 分别设计了由一种和两种材料组成的微机电系统部件, 其中涉及热、电和机械等多物理场的耦合情况。

收稿日期: 2006—10—23

基金项目: 国家重点基础研究发展计划资助项目 (2003CB716207)

现有的拓扑优化设计基本上都基于有限元数值计算方法,在求解大变形问题时,有限元网格可能会产生严重扭曲,出现网格畸变和锁死等情况,这不仅需要网格重划,而且严重地影响解的精度。为克服有限元方法对网格的依赖性,有学者提出了不用网格单元的无网格法<sup>[10,11]</sup>。它对一个问题域的离散不需要定义网格,只需要离散点的节点信息,在这些离散的点上定义紧支函数来实现函数逼近。由于无网格方法采用基于点的近似,可以彻底或者部分地消除求解问题对网格划分的依赖,因而在求解金属冲压成形、高速碰撞、裂纹动态扩展及大变形等问题时,比有限元方法具有天然优势。

无网格法解决了有限元方法在某些领域(如几何非线性问题)出现网格单元畸变和锁死以至于问题无法求解的缺点,而柔性机构的拓扑优化设计本质上具有几何非线性的特点,传统的基于线性理论的分析方法可能导致不合理的优化结果,因此,本文采用无网格伽辽金方法(element free galerkin methods,EFGM)<sup>[12]</sup>进行分布式大变形柔性机构的拓扑优化设计,解决了其中的几何非线性问题,并进行相关理论和应用方面研究。

## 1 基于无网格法的几何非线性分析

### 1.1 无网格伽辽金法离散原理

Belytschko 等<sup>[12]</sup>提出的无网格伽辽金法是典型的基于 Galerkin 弱式的无网格方法,无网格伽辽金法精度高且收敛性好,借助背景网格进行高斯积分,但背景网格和节点无关。无网格伽辽金法首先将求解域  $\Omega$  离散成  $n$  个节点,在域  $\Omega$  内利用移动最小二乘近似<sup>[12]</sup>构造待求函数  $u(x)$  的全局近似函数:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) u_I = \Phi(x) u^T \quad (1)$$

式中, $n$  为近似域内节点总数; $\Phi(x)$  为形函数, $\Phi(x) = (\phi(x_1), \phi(x_2), \dots, \phi(x_n))$ ;  $u$  为节点某一名义值,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 。

无网格伽辽金法采用移动最小二乘近似,由基函数  $p(x)$  和权函数  $w_I(x)$  构造形函数  $\Phi(x)$ ,移动最小二乘近似法通常使用单项式作为基函数,也可使用多项式和三角函数等。在求解域  $\Omega$  的每个节点处定义其权函数  $w_I(x)$  及权函数支撑域  $\Omega_I, \Omega_I$  也称为节点  $x_I$  的支撑域或影响域。在采用移动最小二乘近似方法构造  $u^h(x)$  时,只有那些支撑域覆盖了计算点  $x$  的节点  $x_I$  才对  $u^h(x)$  有贡献。节点的支撑域半径大小要合理,既要保证移动

最小二乘近似的局部特性,又要保证计算点包含有足够多节点。二维问题影响域通常为圆形和方形域,如图 1 所示。本文选择矩形支撑域。

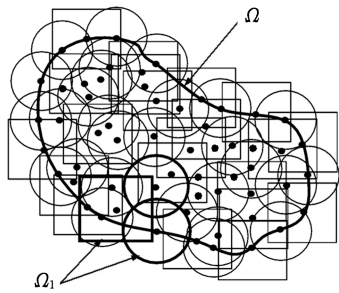


图 1 节点支撑域示意图

无网格伽辽金法利用移动最小二乘法构造的形函数并不具有插值属性: $\phi_I(x_I) \neq \delta_{IJ}$ , 即当节点编号  $J = I$  时,  $u^h(x_I) = \Phi(x_I) u \neq u_I$ 。这样位移边界条件不能直接转换为节点值,导致位移边界条件施加困难。在无网格伽辽金法中用来处理位移边界条件常见的方法有 Lagrange 乘子法、变化 Lagrange 乘子法、罚因子法以及无网格法与有限元耦合等<sup>[10]</sup>。由于 Lagrange 乘子法能获得较精确的结果,故本文采用 Lagrange 乘子法来施加位移边界条件。

### 1.2 构建非线性方程

一般柔性机构设计基于小变形假设,用线性应变进行度量。大变形柔性机构的运动应看成是几何非线性问题,因此,在计算应变时必须包括位移的二次项。采用拉格朗日描述方法<sup>[13]</sup>,则格林—拉格朗日应变张量可表示为

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij} \quad i = 1, 2; j = 1, 2 \quad (2)$$

式中, $\epsilon_{ij}$  为应力张量; $e_{ij}$  为应力的线性项,  $e_{ij} = (u_{j,i}^h + u_{i,j}^h)/2$ ;  $\eta_{ij}$  为应力的二次项,  $\eta_{ij} = u_{k,i}^h u_{k,j}^h / 2, k = 1, 2$ ;  $u^h$  为节点位移;  $u_{k,i}^h$  为位移对坐标的导数张量形式。

格林—拉格朗日应变增量  $\delta \epsilon$  与位移的转换关系可表示为矩阵形式:

$$\delta \epsilon = B \delta u^h \quad (3)$$

由于与格林—拉格朗日应变对应的格林—拉格朗日应力不是对称形式,不便于数学计算,因此我们采用具有对称结构的克希霍夫应力。设结构材料为线弹性属性,克希霍夫应力  $S$  与格林—拉格朗日应变  $\epsilon$  存在如下关系:

$$S = D \epsilon \quad (4)$$

式中, $D$  为材料本构矩阵。

对二维域  $\Omega$  力学问题,根据虚功原理,得到如下非线性问题的控制方程:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(u) = & \int_{\Omega} (\delta \epsilon)^T S d\Omega - \left( \int_{\Omega} (\delta u)^T b d\Omega + \right. \\ & \left. \int_{\Gamma_t} (\delta u)^T \bar{t} d\Gamma \right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $\Omega$  为求解域;  $\bar{t}$  为面力载荷;  $b$  为体力载荷;  $\Gamma_t$  为力边界。

由式(1)和式(5), 考虑  $\delta u$  的任意性, 可得结构残差方程的矩阵形式:

$$\varphi(u) = \int_{\Omega} B_L^T S d\Omega - \left( \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega \right) = 0 \quad (6)$$

式中,  $B_L$  为非线性应变—位移转换矩阵。

设在求解域的位移边界  $\Gamma_u$  上有  $u^h = \bar{u}$ , 采用 Lagrange 乘子法将位移约束条件引入控制方程式(5)中, 可得其离散的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} K_L & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\lambda_i(x) = \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \lambda_{ji} \quad i = 1, 2$$

$$K_L = K_{L0} + K_{L1}$$

$$K_{L0} = \int_{\Omega} B_{L0}^T DB_{L0} d\Omega$$

$$K_{L1} = \int_{\Omega} (B_{L0}^T DB_{L1} + B_{L1}^T DB_{L1} + B_{L1}^T DB_{L0}) d\Omega$$

$$F = \int_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \Phi^T \bar{t} d\Gamma$$

$$B_L = B_{L0} + B_{L1} = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} L_{xx} \phi_{I,x} & L_{yx} \phi_{I,x} \\ L_{xy} \phi_{I,y} & L_{yy} \phi_{I,y} \\ L_{xx} \phi_{I,y} + L_{xy} \phi_{I,x} & L_{yx} \phi_{I,y} + L_{yy} \phi_{I,x} \end{bmatrix}$$

$$L_{xx} = \sum_{k=1}^n \phi_{k,x} u_x^k \quad L_{xy} = \sum_{k=1}^n \phi_{k,x} u_y^k$$

$$L_{yx} = \sum_{k=1}^n \phi_{k,y} u_x^k \quad L_{yy} = \sum_{k=1}^n \phi_{k,y} u_y^k$$

式中,  $K_L$  为总体刚度矩阵;  $C$  为 Lagrange 乘子法产生的边界条件矩阵;  $F$  为结构载荷向量;  $m$  为位移边界上节点数;  $\phi_{I,x}$ 、 $\phi_{I,y}$  分别为形函数对  $x$ 、 $y$  的导数;  $u_x^k$ 、 $u_y^k$  分别为节点  $k$  在  $x$ 、 $y$  方向上的位移;  $K_T$  为系统切线刚度矩阵;  $K_{L0}$  为通常的小位移刚度矩阵;  $K_{L1}$  为初位移矩阵;  $\lambda$  为拉格朗日乘子向量;  $\psi(x)$  为用来离散拉格朗日乘子的形函数矩阵;  $B_{L0}$ 、 $B_{L1}$  分别为通常情况和大变形情况下的应变—位移转换矩阵。

式(7)中的  $u$  采用节点的位移名义值, 采用牛顿法解非线性方程式(7), 需要求解系统刚度矩阵:

$$K_T = \frac{d\varphi(u)}{du} = K_{L0} + K_{L1} + K_{NL} \quad (8)$$

$$K_{NL} = \int_{\Omega} B_{NL}^T S B_{NL} d\Omega$$

$$\varphi(u) = F_{\varphi} - F$$

$$F_{\varphi} = \int_{\Omega} B_L^T S d\Omega$$

$$B_{NL} = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ \phi_{I,y} & 0 \\ 0 & \phi_{I,x} \\ 0 & \phi_{I,y} \end{bmatrix}$$

式中,  $K_{NL}$  为由于克希霍夫应力  $S$  引起的初应力矩阵;  $F_{\varphi}$  为系统内力;  $B_{NL}$  为克希霍夫应力度量下的应力—位移转换矩阵。

### 1.3 非线性方程组求解

式(7)是以结构节点的位移名义值  $u$  为未知量的非线性方程组, 我们采用牛顿迭代法求解。牛顿迭代法解非线性方程组式(7)按如下步骤进行:

(1) 利用式(7)中定义的小位移刚度矩阵  $K_{L0}$ , 求解线性方程组:

$$\begin{bmatrix} K_{L0} & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \bar{u} \end{bmatrix} \quad (9)$$

得到第一次近似解  $u^1$ 。

(2) 由  $u^1$  开始, 按式(7)和式(4)计算  $B_L^1$  和  $S^1$ , 将它们代入式(6)求出不平衡力  $\varphi^1 = \varphi(u^1)$ 。

(3) 利用式(8), 求得对应于  $u^1$  的系统切线刚度矩阵  $K_T^1$ 。

(4) 计算位移修正量:

$$\Delta u^1 = - (K_T^1)^{-1} \varphi^1 \quad (10)$$

由此求得第二次近似解:

$$u^1 = u^1 + \Delta u^1 \quad (11)$$

(5) 对  $u^1$  重复步骤(2)~步骤(4), 直到不平衡力  $\varphi^1$  充分小为止。

这样, 就可求出求解域  $\Omega$  内各节点的位移名义值  $u$ , 按式(1)则可求得求解域的位移场量  $u^h$ 。

## 2 柔性机构的多目标拓扑优化设计

### 2.1 拓扑优化的人工密度材料模型

SIMP 密度函数惩罚模型主要通过引入惩罚因子<sup>[14]</sup>, 在材料的弹性模量和单元相对密度之间建立起一种显式的非线性对应关系:

$$E^p(x_j) = E_{\min} + x_j^p (E_0 - E_{\min}) \quad (12)$$

式中,  $p$  为中间密度材料的惩罚因子,  $E^p$  为插值以后的弹性模量;  $E_0$  为固体弹性模量;  $E_{\min}$  为孔洞材料的弹性模量,  $E_{\min} = E_0/1000$ 。

惩罚因子  $p$  的作用是使中间密度值向 0 和 1 两端聚集, 这样可以使连续变量的拓扑优化模型能很好地逼近原来 0—1 离散变量的优化模型, 本文选取  $p = 3$ 。

由于无网格伽辽金法是利用高斯积分来组装刚度矩阵  $K$  的, 因此在无网格方法中使用 SIMP 模型, 可将设计变量离散到各积分高斯点上, 这样  $x_j$  表示高斯点  $j$  的设计变量。

### 2.2 建立优化模型

柔性机构设计的目标是在设计的拓扑结构输入端给定输入后, 高效地将其转化为在输出端的输出。柔性机构的输入可以是指定的力、位移或者

是温度的变化、电信号等<sup>[6]</sup>,本文设在输入端施加指定力载荷。

柔性机构优化设计的目标函数根据机构的功能要求不同而相异,建立准则也多种多样。本文所研究柔性机构一方面通过自身变形完成运动输出的要求,结构要具有足够的柔性;另一方面要求结构具有足够的刚度以适应外界载荷,维持整个机构本身的形状。这样获得的柔性机构既能承受一定的载荷,又能产生期望的运动。因而柔性机构的拓扑优化设计是一个多目标优化问题。

在柔性机构的多目标优化中,优化的两个目标函数分别用结构函数和运动学函数来表示<sup>[15]</sup>。其中的结构函数用来表示结构的刚度,可用应变能来度量;运动学函数用来表示结构输出端的运动,可用共有应变能来度量。

柔性机构的设计可建立如图 2 所示的弹簧模型,在设计域上施加驱动力  $F_{in}$ 。在输出端用刚度为  $K_s$  的弹簧模拟工件对机构的反作用力。

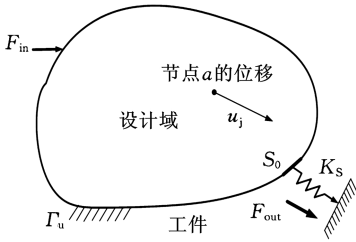


图 2 柔性机构设计的弹簧模型

无网格伽辽金法中的设计变量离散到高斯点上,并由离散节点来拟合设计域的场量,根据前述无网格伽辽金法基本原理,共有应变能为

$$E_{MS}(\mathbf{X}) = \mathbf{U}_1^T \mathbf{K}_2 \mathbf{U}_2 \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{U}_1$  为只在机构的输入端施加实际载荷  $F_{in}$  时,各离散节点的名义值;  $\mathbf{U}_2$  为只在结构输出端施加单位虚载荷  $F_{out}$  时,各离散节点的名义值;  $\mathbf{K}_2$  为只施加  $F_{out}$  时的系统总体刚度矩阵;  $\mathbf{X}$  为设计变量。

对如图 2 所示的结构,外力作用下结构所吸收的能量用结构的应变能来表示,应变能越小,表示结构吸收的能量越小,结构运动效率越高。在柔性机构的设计当中,应变能定义为与输出点载荷方向相反的单位虚拟载荷对设计区域的作用效果。对连续体结构,利用无网格伽辽金法建立的应变能为

$$E_s(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} \quad (14)$$

式中,  $\bar{\mathbf{U}}$  为离散节点在  $\bar{\mathbf{F}} = -\mathbf{F}_{out}$  作用下的节点名义值;  $\bar{\mathbf{K}}$  为总体刚度矩阵。

本文优化设计的目标为在保持机构稳定的情况下,输出端输出位移最大,根据以上分析,文献<sup>[15,16]</sup>运用折衷规划法,基于结构应变能和共

有应变能,建立优化模型。

柔性机构的拓扑优化设计模型为

$$\left. \begin{aligned} & \text{Find } \mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_G})^T \\ & \min f(\mathbf{X}) \\ & \text{s. t. } \sum_{j=1}^n x_j V_j - \bar{V} \leq 0 \\ & \quad x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max} \quad j = 1, 2, \dots, n_G \\ & \quad \mathbf{K}_1 \mathbf{U}_1 = \mathbf{F}_{in}, \mathbf{K}_2 \mathbf{U}_2 = \mathbf{F}_{out}, \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{F}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$f(\mathbf{X}) = \{[(1-w)E_s^Z(x)]^q - [wE_{MS}^Z(x)]^q\}^{\frac{1}{q}} \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{X}$  为离散到高斯点的设计变量;  $n_G$  为设计域内高斯点数目;  $x_j^{\min}$  为设计变量的最小取值(避免总体刚度矩阵奇异),  $x_j^{\min} = 0.001$ ;  $x_j^{\max}$  为设计变量最大值;  $w$  为权重。

正则化各单目标函数,以避免由于目标函数值的数量级不同而引起的数值计算问题,则

$$E_s^Z(x) = \frac{E_s(x) - E_s^{\min}}{E_s^{\max} - E_s^{\min}}$$

$$E_{MS}^Z(x) = \frac{E_{MS}(x) - E_{MS}^{\min}}{E_{MS}^{\max} - E_{MS}^{\min}}$$

式中,  $E_s(x)$  为结构的最小值柔度;  $E_{MS}(x)$  为结构输出端的最大值位移;  $E_s^{\max}$ 、 $E_s^{\min}$  分别为单目标函数  $E_s(x)$  的最大、最小柔度;  $E_{MS}^{\max}$ 、 $E_{MS}^{\min}$  分别为单目标函数  $E_{MS}(x)$  的最大、最小输出位移。

### 2.3 目标函数的伴随敏度分析

本文将设计变量离散到无网格法中高斯积分点上,目标函数式(16)的敏度形式表示如下:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{1}{q} f(\mathbf{X})^{\frac{1-q}{q}} [(1-w)^q \frac{\partial (E_s^Z(x))^q}{\partial x_j} - w^q \frac{\partial (E_{MS}^Z(x))^q}{\partial x_j}] \quad (17)$$

$$\frac{\partial (E_s^Z(x))^q}{\partial x_j} = q \frac{(E_s(x) - E_s^{\min})^{q-1}}{(E_s^{\max} - E_s^{\min})^q} \frac{\partial E_s}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial (E_{MS}^Z(x))^q}{\partial x_j} = q \frac{(E_{MS}(x) - E_{MS}^{\min})^{q-1}}{(E_{MS}^{\max} - E_{MS}^{\min})^q} \frac{\partial E_{MS}}{\partial x_j}$$

式中,  $\partial E_{MS}/\partial x_j$ 、 $\partial E_s/\partial x_j$  均为单目标函数的敏度;  $q$  为权重指数,用来表示目标函数的相对权重,  $q \geq 2$ 。

对于 SIMP 密度-刚度插值模型,通过伴随敏度分析<sup>[14]</sup>,利用高斯积分计算敏度值,可得

$$\frac{\partial E_{MS}}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^{n_G} w_j p(x_j)^{p-1} (\mathbf{U}_1^j)^T \mathbf{K}_2^j \mathbf{U}_2^j \quad (18)$$

$$\frac{\partial E_s}{\partial x_j} = - \sum_{j=1}^{n_G} w_j p(x_j)^{p-1} (\bar{\mathbf{U}}_j)^T \bar{\mathbf{K}}_j \bar{\mathbf{U}}_j \quad (19)$$

式中,  $w_j$  为高斯点  $j$  的权重;  $\mathbf{U}_1^j$ 、 $\mathbf{U}_2^j$ 、 $\bar{\mathbf{U}}_j$  分别为相应工况下高斯点  $j$  支撑域内所有节点的位移向量;  $\mathbf{K}_2^j$ 、 $\bar{\mathbf{K}}_j$  分别为相应工况下高斯点  $j$  支撑域内所有节点对总体刚度矩阵的贡献值。

### 2.4 优化模型求解

连续体结构拓扑优化通常有较多的设计变量,因而求解这些数量庞大的非线性方程并不是一件很容易的事。在建立优化模型和进行敏度分



析后,为避免直接求解这些方程,依据 kuhn-tucker 条件,利用优化准则法(optimality criteria, OC)<sup>[17]</sup>进行优化求解。

在计算中,可能出现一些结构上不连续的散乱点,类似于采用有限元法时出现的棋盘格式,我们称之为点态棋盘格式。基于 SIMP 插值模型和有限元数值方法的拓扑优化结果中出现的棋盘格式,已经有学者提出了不同的解决办法。本文参考 Sigmund<sup>[18]</sup>提出的敏度过滤技术解决点态棋盘格问题。敏度过滤技术是一种局部意义上的约束方法,它以控制半径范围内各高斯点敏度的加权平均值代替原单元的敏度值。敏度过滤按如下格式进行:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{f=1}^{n_{GS}} \bar{H}_f} \sum_{f=1}^{n_{GS}} \bar{H}_f x_f \frac{\partial C}{\partial x_f} \quad (20)$$

$$\bar{H}_f = r_{\min} - s(e, f)$$

式中,  $\bar{H}_f$  为卷积分子,  $\bar{H}_f$  在控制半径之外为零;  $r_{\min}$  为控制半径,  $r_{\min} > 1.0$ , 根据文献[18]推荐取  $r_{\min} = 3.0$ ;  $s(e, f)$  为高斯点  $e$  和  $f$  之间的距离;  $n_{GS}$  为控制半径内所有高斯点数目。

协调高斯点密度和控制半径的大小,可得到较好的拓扑结构。

### 3 优化求解流程

根据上述理论,基于无网格数值方法,利用拓扑优化理论,在 MATLAB 平台上,实现了大变形柔性机构设计算法,其求解流程如图 3 所示。

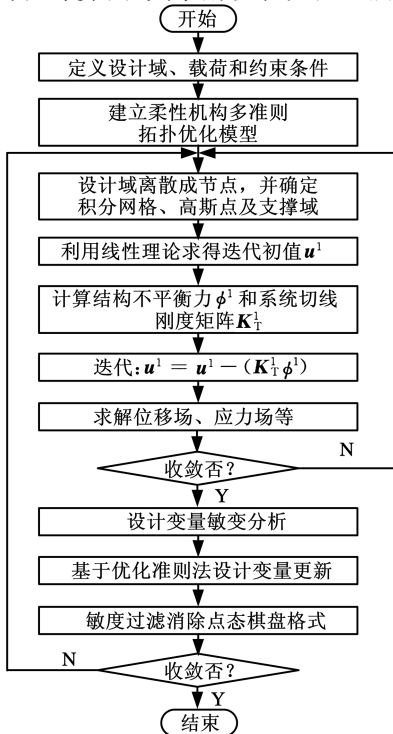


图 3 大变形柔性机构拓扑优化流程图

求解流程首先进行设计问题初始化,完成参数定义和优化模型的建立。优化求解过程由两个嵌套的迭代循环组成,内循环为基于无网格法,在每次设计变量更新中利用牛顿法求解非线性问题;外循环为利用优化准则法进行设计变量更新迭代。

### 4 算例与结果分析

分别基于结构线性和非线性理论,利用无网格伽辽金法进行大变形位移反相器的拓扑优化设计,比较分析设计结果,说明基于非线性理论采用无网格法进行大变形柔性机构的多目标拓扑优化设计的可行性和必要性。

位移反相器拓扑优化的目标是在输入端加载一定载荷  $f_{in}$  后,输出端的位移  $u_{out}$  最大。其两个目标函数分别是最大化输出端的  $E_{MS}$  以及最小化结构的  $E_S$ 。设  $E_{MS}$  的权重为 0.8,设计的体积比为 25%。设计域尺寸为  $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ ,如图 4 所示。设计域均匀布置  $41 \times 41$  节点,根据节点布置将设计域划分为  $40 \times 40$  个积分单元,积分单元设置  $4 \times 4$  高斯点。

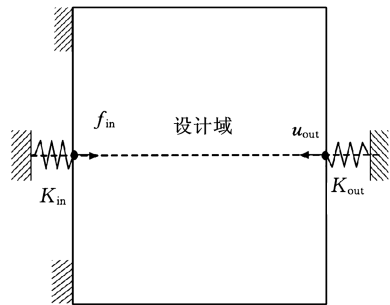
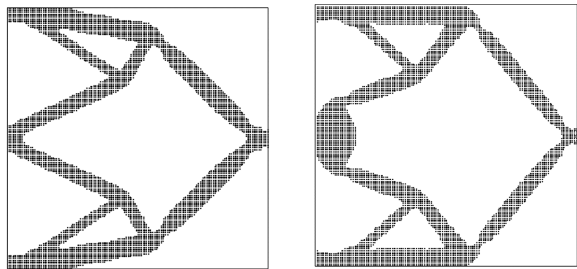


图 4 位移反相器的设计域示意图

设材料的弹性模量  $3\text{GPa}$ ,泊松比为 0.3,输入载荷为  $f_{in} = 100\text{N}$ 。在输入端固定一个刚度为  $K_{in} = 3 \times 10^5 \text{N/m}$  的弹簧来约束输入点的位移,输入能量通过输入驱动力和弹簧的刚性来表示。在输出端固定一个刚度为  $K_{out} = 3 \times 10^4 \text{N/m}$  的弹簧来模拟工件对机构的作用力。

利用无网格伽辽金法数值求解技术,最后以超过阈值的设计变量所对应的高斯点来表达柔性机构的优化拓扑结果,分别基于线性和非线性理论,得到了如图 5 所示位移反相器的拓扑优化设计结果。在其他条件不变的情况下,如不采用敏度过滤,就会出现点态棋盘格式,如图 6 所示。这种结构无法制造,同时也不能对后续的设计提供有价值的参考,因而,在基于无网格法的拓扑优化中有必要消除数值计算问题。

从优化结果可以看出,对于同样的优化设计



(a) 基于线性理论优化结果 (b) 基于非线性理论优化结果

图 5 优化设计结果图

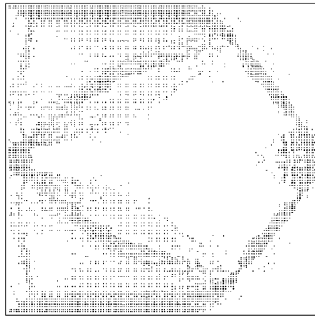
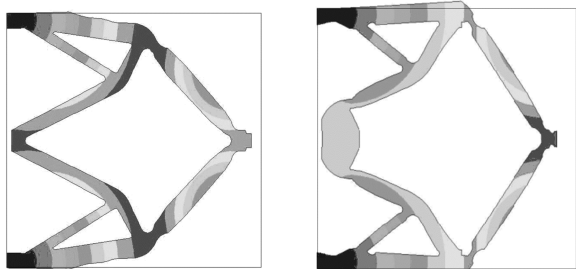


图 6 散乱点云格式

问题,在相同的条件下,基于结构线性和非线性理论的优化结果有较大差别。根据优化结果,重构几何模型,并对重构后的几何模型图进行非线性分析,得到如图 7 所示的结构变形及位移场分布图。在相同的条件下图 7 输出端位移值分别为 0.0341cm 和 0.1079cm。本算例中,利用无网格数值算法,基于非线性理论的优化结果输出位移是基于线性理论的 3.16 倍。当输入载荷增大到原来的 10 倍时,两者的变形及位移场如图 8 所示,基于结构线性理论和非线性理论优化结果的输出端位移分别是 0.3941cm 和 0.8442cm,前者只有后者的 46.68%。

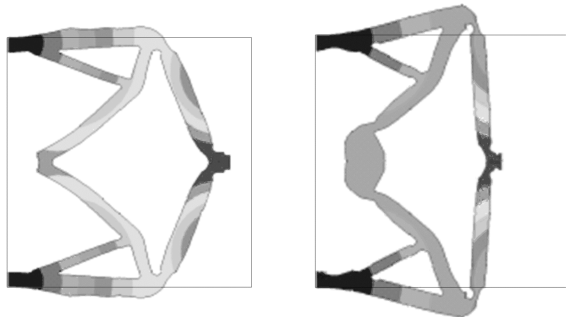


(a) 线性结构变形图 (b) 非线性结构变形图

图 7 非线性分析结构变形及位移场分布图

按结构优化的目标,要求在保持结构稳定的情况下,在输入端加载一定载荷后,输出端的位移最大。从以上反相器加载后的输出端输出位移对比分析可以看出,基于非线性理论的优化结果的输出端位移在相同的加载条件下明显大于基于线性理论的优化结果。

根据以上分析可证明本文方法的正确性,说



(a) 线性结构变形图 (b) 非线性结构变形图

图 8 增大载荷后结构变形图

明了无网格伽辽金法能用于大变形柔性机构拓扑优化设计,并且得到了比基于结构线性理论更好的优化结果,说明大变形柔性机构按非线性理论进行设计更合理。

由于基于非线性理论的优化过程要进行牛顿迭代,所以计算时间要比基于线性理论的计算时间长,本文中,基于非线性理论的计算时间约是基于线性理论计算时间的 3 倍。而计算时间开销与离散点的数目、高斯积分点数、优化收敛准则和牛顿迭代收敛准则有密切的关系。

5 结论

本文利用无网格方法求解几何非线性问题,将其引入到连续体结构的拓扑优化设计中,为连续体结构拓扑优化提供了新途径,并利用该方法成功地进行了大变形柔性机构拓扑优化设计。由于无网格法不需要划分网格,所以可以解决一些复杂问题拓扑优化中由于使用有限元方法产生网格畸变、锁死而造成优化模型不可求解的问题。本文基于 SIMP 模型和折衷规划法建立了多准则拓扑优化模型,利用无网格法和优化准则法求解模型,解决了柔性机构中有关几何非线性的拓扑优化设计问题。

改进无网格法在计算效率和边界条件处理方面的不足,将会极大促进该方法的应用和发展,同时也会拓展基于无网格法的拓扑优化设计方法的研究和应用领域。

参考文献:

[1] Howell L L. Compliant Mechanisms [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

[2] Ananthasuresh G K, Kota S. Designing Compliant Mechanisms[J]. Mechanical Engineering, 1995, 117 (11): 93-96.

[3] Jog C S. Distributed - parameter Optimization and Topology Design for Nonlinear Thermo - elasticity [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and

- Engineering, 1997, 132(1-2): 117-134.
- [4] Buhl T, Pedersen C B W, Sigmund O. Stiffness Design of Geometrically Nonlinear Structures using Topology Optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2000, 19(2): 3443-3459.
- [5] Gea H C, Luo J. Topology Optimization of Structures Withgeometrical Nonlinearities[J]. Computers and Structures, 2001, 79(20/21): 1977-1985.
- [6] Pedersen C B W, Buhl T, Sigmund O. Topology Synthesis of Large — displacement Compliant Mechanisms [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(12): 2683-2705.
- [7] Bruns T E, Tortorelli D A. Topology Optimization of Nonlinear Elastic Structures and Compliant Mechanisms[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190 (26/27): 3443-3459.
- [8] Sigmund O. Design of Multiphysics Actuators using Topology Optimization — Part I: One — material Structures[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190 (49/50): 6577-6604.
- [9] Sigmund O. Design of Multiphysics Actuators Using Topology Optimization — Part II: Two — material Structures [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190 (49/50): 6605-6627.
- [10] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [11] Belyeschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless Methods; an Overview and Recent Developments[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1/4): 3-47.
- [12] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element Free Galerkin Methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.
- [13] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [14] BendsDe M P, Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2003.
- [15] Luo Z, Chen L P, Yang J Z, et al. Compliant Mechanism Design using Multi—objective Topology Optimization Scheme of Continuum Structures [J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2005, 30(2): 142-154.
- [16] Luo Z, Chen L P, Yang J Z, et al. Fuzzy Tolerance Multilevel Approach for Structural Topology Optimization[J]. Computers and Structures, 2006, 84 (3): 127-140.
- [17] Zhou M, Rozvany G I N. The COC Algorithm, Part II: Topological, Geometry and Generalized Shape Optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991; 89 (1/3): 309-336.
- [18] Sigmund O. On the Design of Compliant Mechanisms using Topology Optimization[J]. Mechanics of Structures and Machines, 1997, 25(4): 493-524.

(编辑 马尧发)

作者简介: 杜义贤, 男, 1978 年生。华中科技大学国家 CAD 支撑软件工程技术研究中心博士研究生。主要研究方向为结构分析和拓扑优化、无网格数值计算方法和柔性机构。陈立平, 男, 1964 年生。华中科技大学国家 CAD 支撑软件工程技术研究中心教授、博士研究生导师。罗 震, 男, 1974 年生。香港中文大学自动化与计算机辅助工程系博士后研究人员。

## 云南省机械工程学会举办云南电力装备制造业振兴与创新论坛

为贯彻落实国务院和云南省委、省政府关于振兴装备制造业的文件精神, 云南省机械工程学会于 2007 年 12 月 9 日举办了《云南电力装备制造业振兴与创新论坛》。来自全省电力、电工行业企业、科研院所、高等院校和政府部门 50 多个单位的专家、领导和代表共 200 人出席了论坛。

马洪琪院士、邢玉久常务副会长分别作了题为《以工程建设为依托, 发展云南电力装备制造业》和《我国电力装备现状及发展战略》的论坛主旨报告。昆明市经委副主任苟光清在论坛上作了关于云南电力装备产业基地情况汇报。省电工行业协会常务副理事长张南华在论坛上报告了《云南电力支柱产业发展带动云南电力装备制造业发展研究》项目的主要内容: ①云南省电力装备制造业发展现状和发展机遇; ②云南省电力快速发展带动和加快电力装备制造业发展的重要性和紧迫性; ③云南省电力装备制造业近期和中长期发展思路、目标和重点; ④云南省电力快速发展带动和加快电力装备制造业发展的主要措施和政策建议。

论坛共征集入选论文 50 篇。经专家评审组评审, 共评出优秀论文一等奖 8 篇、二等奖 15 篇、三等奖 13 篇。由马洪琪院士、邢玉久副会长、牟双江副主席、张亚群会长向论文作者颁发了优秀论文证书。

(云南省机械工程学会)