

单级齿轮传动系统的 Hopf 分岔与混沌研究

苟向锋 吕小红 陈代林
兰州交通大学,兰州,730070

摘要:为研究齿轮传动系统中齿侧间隙等非线性因素对系统振动特性的影响,综合考虑齿侧间隙、时变啮合刚度、综合啮合误差和轴承纵向响应,建立了三自由度单级直齿轮副传动系统的扭转振动非线性动力学模型;采用变步长 4—5 阶 Runge—Kutta 法,对系统运动的状态方程进行了数值求解;构建了系统的 Poincaré 截面,得到了系统的分岔图。结合系统相图、Poincaré 映射图及 FFT 频谱图,分析了系统在激励频率变化时的动力学特性,发现系统在不同激励频率下会发生 Hopf 分岔、环面倍化、擦切分岔及倍化分岔。

关键词:非线性动力学;混沌;分岔;齿轮;Hopf

中图分类号:TH113;O322 **DOI:**10.3969/j.issn.1004—132X.2014.05.020

Research on Hopf Bifurcation and Chaos of the Single—stage Gear Transmission System

Gou Xiangfeng Lü Xiaohong Chen Dailin
Lanzhou Jiaotong University,Lanzhou,730070

Abstract: In order to investigate the influences of the backlash and other nonlinear factors on the system, a nonlinear dynamics model for a single—stage spur gear pair system with three degree—of—freedom was established wherein the backlash, the time—varying stiffness, the torsion motion and the transmission error were considered. The nonlinear three—degree—of—freedom equations were solved by employing variable step size Runge—Kutta integration method and the bifurcation diagrams were obtained. The nonlinear dynamics characteristics of the system were discussed for the varying of the exciting frequency and classified based on bifurcation diagrams, phase portraits, Poincaré maps and FFT spectrum. The Hopf bifurcation, torus doubling bifurcation, grazing bifurcation and doubling bifurcation are found in the different values of the exciting frequency and their bifurcation points are given. There are two routes from periodic motion to chaos motion.

Key words: nonlinear dynamics; chaos; bifurcation; gear; Hopf

0 引言

齿轮传动是应用广泛的机械传动之一。单级齿轮啮合系统的动力学模型是最简单的分析模型,该类模型所体现出的齿轮系统非线性振动特征^[1]可用来研究轮齿啮合本身所产生的振动特性。Kahraman 等^[2]在建立的单自由度单级齿轮系统动力学模型中考虑了齿侧间隙和误差激励,研究了系统中存在的混沌响应和次谐波响应。文献^[3]研究了齿轮综合啮合误差对系统非线性动力学行为的影响。王立华等^[4]研究了含间隙和时变啮合刚度的单自由度齿轮系统动力学模型的 Poincaré 映射。杨绍普等^[5]利用增量谐波平衡法得出了一类考虑时变啮合刚度和间隙的直齿轮副非线性动力学模型的解的统一形式,并研究了系

统分岔特性及阻尼比、外激励幅值对系统幅频特性的影响。王晓笋等^[6]以不同的定量和定性分析方法研究了齿轮啮合过程中外载荷、齿侧间隙对系统动力学特性的影响,并数值计算得到了系统周期状态和混沌状态下的相空间轨线、Poincaré 截面和关联维数。齿轮系统中众多的非线性因素使得其建模和求解非常困难,若再考虑齿轮系统中存在的各种故障,则系统模型更为复杂^[7]。研究人员近年来开始逐渐考虑齿轮的实际工程背景^[8-10]。已有文献开始考虑齿轮使用中的间隙^[11]、碰撞^[12]和制造误差^[13]等因素对齿轮系统动力学行为的影响。

本文以三自由度单级直齿轮副非线性动力学模型为研究对象,考虑齿轮系统的纵向位移,利用数值方法对激励频率变化时的系统动态特性进行研究。

收稿日期:2012—08—07

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51365025);甘肃省自然科学基金资助项目(1212RJZA070);甘肃省高等学校基本科研业务费资助项目

1 力学模型与运动微分方程

图 1 所示为处于啮合状态的一对单级齿轮传动系统的力学模型,忽略齿轮传动轴弯曲和扭转变形。齿轮 1、齿轮 2 分别为单级齿轮传动系统中的主从动齿轮。其中 I_{g1} 、 I_{g2} 为主从动齿轮的转动惯量; m_{g1} 、 m_{g2} 为主从动齿轮的质量; r_{bg1} 、 r_{bg2} 为主从动齿轮的基圆半径; θ_{g1} 、 θ_{g2} 为主从动齿轮的扭转角位移; F_{b1} 、 F_{b2} 为主从动轴上轴承对齿轮的作用力; T_{g1} 、 T_{g2} 为作用在主从动齿轮上的转矩; c_{b1} 、 c_{b2} 为主从动轴上轴承的阻尼系数; k_{b1} 、 k_{b2} 为主从动轴上轴承的平均支承刚度; c_h 为轮齿啮合的阻尼系数; \bar{f}_{b1} 、 \bar{f}_{b2} 为主从动轴上轴承的位移函数; \bar{f}_h 为轮齿啮合的位移函数; y_{g1} 、 y_{g2} 为两齿轮中心的位移; $e(t)$ 为沿齿轮基圆切向综合误差(简称为齿轮综合误差)。齿轮的基本几何参数见表 1。

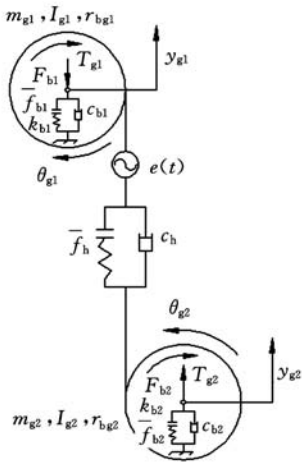


图 1 单级齿轮传动系统的力学模型

表 1 齿轮几何参数

齿轮	模数 m (mm)	齿数 z	齿宽 B (mm)	压力角 α ($^{\circ}$)	顶隙系数 c	齿顶高系数 h_a
主动 齿轮 1	3	40	25	20	0.25	1
从动 齿轮 2	3	40	25	20	0.25	1

忽略输出扭矩的波动,仅考虑由 $e(t)$ 和输入扭矩波动引起的低频外激励导致的高频内部激励,则有

$T_{g1}(t) = T_{g1m} + T_{g1a}(t)$ (1)

$T_{g2}(t) = T_{g2m}$ (2)

式中, $T_{g1a}(t)$ 为输入扭矩的变化部分; T_{g1m} 为输入扭矩的平均值; $T_{g1}(t)$ 为输入扭矩; T_{g2m} 为输出扭矩的平均值; $T_{g2}(t)$ 为输出扭矩。

根据牛顿力学定律,图 1 所示三自由度单级

齿轮传动系统的扭转振动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} m_{g1} \ddot{y}_{g1} + c_{b1} \dot{y}_{g1} - c_h (\dot{x} - \dot{y}_{g1} + \dot{y}_{g2} - \dot{e}) + k_{b1} \bar{f}_{b1}(y_{g1}) - k_h(t) \bar{f}_h(x - y_{g1} + y_{g2} - e) &= -F_{b1} \\ m_{g2} \ddot{y}_{g2} + c_{b2} \dot{y}_{g2} + c_h (\dot{x} - \dot{y}_{g1} + \dot{y}_{g2} - \dot{e}) + k_{b2} \bar{f}_{b2}(y_{g2}) + k_h(t) \bar{f}_h(x - y_{g1} + y_{g2} - e) &= F_{b2} \\ m_{c1} \ddot{x} - c_h (\dot{x} - \dot{y}_{g1} + \dot{y}_{g2} - \dot{e}) + k_h(t) \bar{f}_h(x - y_{g1} + y_{g2} - e) &= F_m + F_{aT}(t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$x(t) = r_{bg1} \theta_{g1}(t) - r_{bg2} \theta_{g2}(t)$

$m_{c1} = 1 / (\frac{I_{bg1}^2}{I_{g1}} + \frac{I_{bg2}^2}{I_{g2}})$

$F_m = T_{g1m} / r_{bg1} = T_{g2m} / r_{bg2}$

$F_{aT}(t) = \frac{m_{c1} T_{g1a}(t)}{2 I_{g1}}$

$k_h(t) = k_h(t + 2\pi / \Omega_h) = k_{hm} + \sum_{r=1}^{\infty} k_{ha,r} \cos(r \Omega_h t + \varphi_{h,r})$

其中, $k_h(t)$ 为齿轮啮合刚度,随时间周期变化,表示为谐波级数的形式, k_{hm} 为平均啮合刚度, $k_{ha,r}(r=1,2,\cdots,\infty)$ 为各谐波分量的系数, $\varphi_{h,r}(r=1,2,\cdots,\infty)$ 是对应的相位角, Ω_h 为轮齿量纲一啮合频率。

定义齿轮传动的相对扭转位移 $p(t)$ 为

$p(t) = r_{bg1} \theta_{g1}(t) - r_{bg2} \theta_{g2}(t) - y_{g1}(t) + y_{g2}(t) - e(t)$ (4)

为了便于分析和计算,在实际动力学分析中,突出齿轮啮合时的齿侧间隙和时变刚度对系统非线性动力学行为的影响,忽略轴承径向间隙引发的非线性力—位移关系,仅把齿轮啮合的力—位移关系看作具有间隙 $2b_h$ 的间隙型函数,即取 $f_{bi}(y_{gi}) = y_{gi}, i=1,2$ 。忽略由扭矩波动引起的低频外激励项,假设系统激励仅有内部激励及平均力分量。对于 $F_{ah}(t)$ 和 $k_{33}(t)$,只考虑级数中基频项的影响(即 $r=1$) 引用文献[14]所述的符号意义、化简条件及量纲一化步骤,令 $x_1 = y_{g1}$, $x_3 = y_{g2}$, $x_5 = p$,则得到系统的状态方程组:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -f_{b1} - 2\xi_{11}x_2 - 2\xi_{13}x_6 - k_{11}x_1 - k_{13}(t)f_h(x_5) \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_{b2} - 2\xi_{22}x_4 + 2\xi_{23}x_6 - k_{22}x_3 + k_{23}(t)f_h(x_5) \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= f_m + f_{ah1}\Omega_h^2 \cos(\Omega_h t) + \dot{x}_2 - \dot{x}_4 - 2\xi_{33}x_6 - k_{33}(t)f_h(x_5) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中, x_1 、 x_3 、 x_5 分别表示主动齿轮、从动齿轮和齿轮传动相对扭转的量纲一位移, x_2 、 x_4 、 x_6 分别表示相应的量纲一速度, $k_{33}(t) = 1 - \epsilon \cos(\Omega_h t)$, $k_{13}(t) = k_{23}(t) = k_{33}(t) / 4.0$,其他各变量符号的意

义参见文献[14]。齿轮啮合的非线性位移函数为

$$f_h(x_5) = \begin{cases} x_5 - D & x_5 > D \\ 0 & -D \leq x_5 \leq D \\ x_5 + D & x_5 < -D \end{cases} \quad (6)$$

式中, D 为量纲一侧隙。

2 齿轮系统的 Hopf 分岔分析

对于齿轮系统, 设主动轮的转速变化是由输入转矩的波动频率变化引起的, 即主动齿轮旋转一周, 输入转矩波动一次。则轮齿啮合频率是输入转矩波动频率 Ω_h 的整数倍。因此系统式(5)是一受周期激励的系统, 其激励周期 $T=2\pi/\Omega_h$ 。令 $\theta=\Omega_h t$, 该受周期激励系统的 Poincaré 截面可取为

$$\Sigma = \{(x_1, \dot{x}_1, x_3, \dot{x}_3, x_5, \dot{x}_5, \theta) \in \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}, \theta = nT\} \quad (7)$$

式中, \mathbf{S} 为相空间。

因系统运动的状态方程组的维数很高, 直接求其解析解是非常困难的, 采用变步长 4-5 阶 Runge-Kutta 法对三自由度单级齿轮动力学状态方程进行数值求解。选取参数 $\epsilon=0.2, D=1.0, k_{11}=k_{22}=1.1, f_{b1}=f_{b2}=0.1, f_m=0.1, f_{ah1}=0.05, \xi_{11}=\xi_{22}=0.01, \xi_{13}=\xi_{23}=0.0125, \xi_{33}=0.05$ 作为基准参数, 并取初始条件 $x_i=0$ ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)。改变转矩的波动频率 Ω_h (等于轮齿啮合频率) 的值, 分析系统动态响应的变化。 $\Omega_h \in [1.35, 1.5]$ 的系统分岔图见图 2 (限于篇幅, 此处仅给出 x_6 随频率 Ω_h 变化的分岔图)。系统的相图如图 3 所示。系统的 Poincaré 映射及快速傅里叶变换 (FFT) 频谱分别如图 4、图 5 所示。

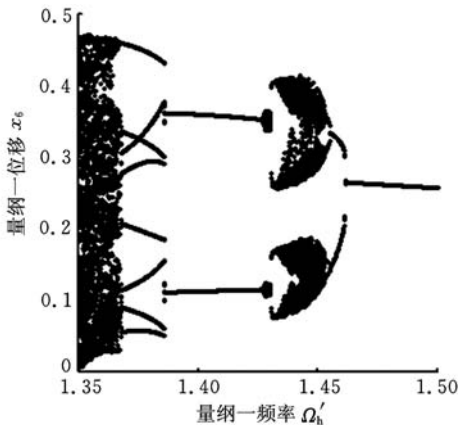


图 2 系统分岔图

由图 2 可见, 当 $\Omega_h > 1.4644$ 时, 系统表现为稳定的简谐周期 1 运动, $\Omega_h=1.5$ 时的系统相图见图 3a, 相图表现为一椭圆; 其频谱图见图 5a, 频谱离散地分布在 $n\Omega_h$ (n 为正整数, 下同) 上。 $\Omega_h =$

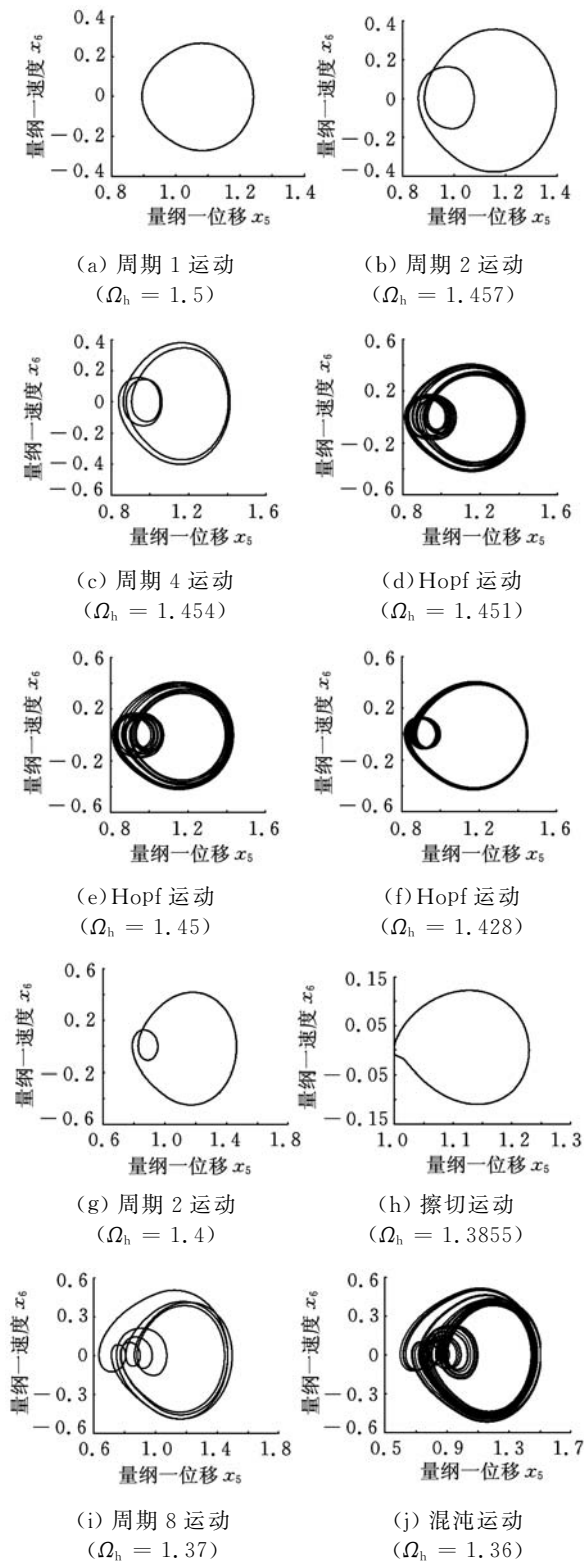


图 3 系统相图

1.4644 时系统发生倍化分岔, 系统运动由稳定的简谐周期 1 运动分岔为稳定的简谐周期 2 运动, $\Omega_h=1.457$ 时的相图见图 3b, 相图表现为两个相互缠绕的椭圆; 其 Poincaré 映射图见图 4a, 表现为 2 个离散点; 其频谱图见图 5b, 频谱分布在 $n\Omega_h/2$ 频率上。当 $\Omega_h=1.4552$ 时系统发生倍化分岔, 系统运动由稳定的周期 2 运动分岔为稳定的周期 4

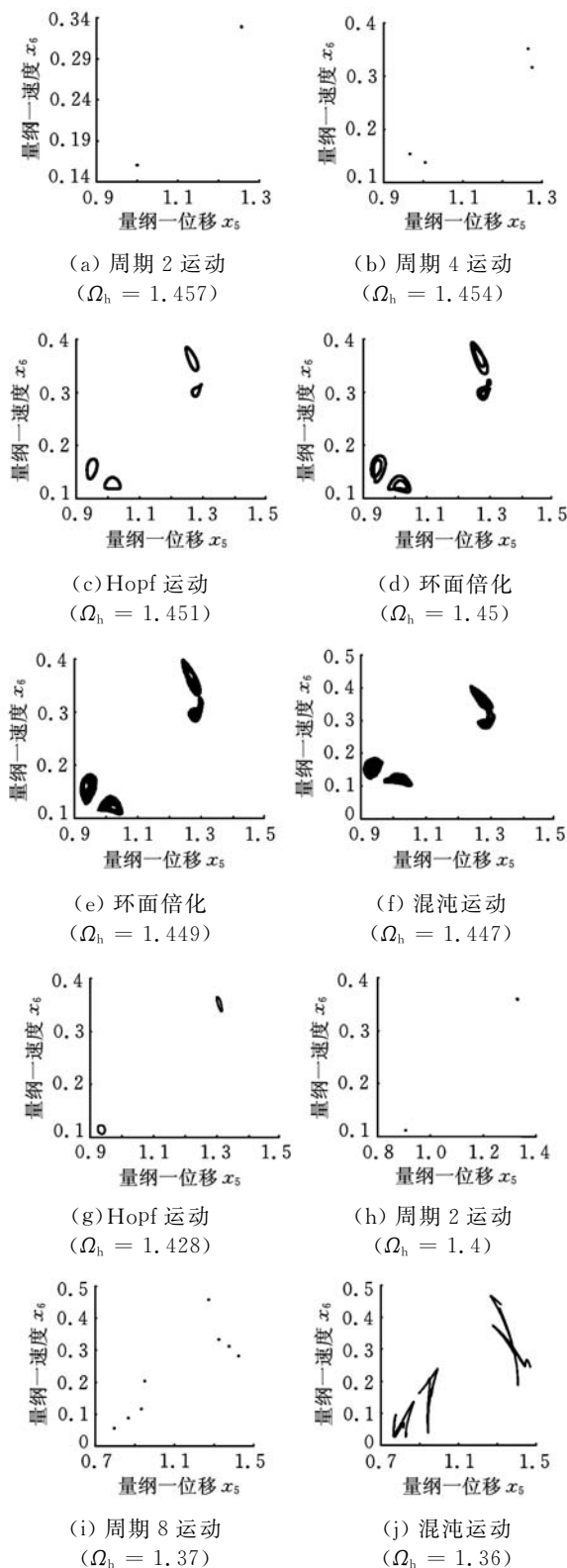


图 4 系统 Poincaré 映射图

运动, $\Omega_h = 1.454$ 时的相图见图 3c, 相图为 4 个相互缠绕的椭圆; 其 Poincaré 映射图见图 4b, 表现为 4 个离散的点; 其频谱图如图 5c 所示, 频谱分布在 $n\Omega_h/4$ 频率上。进一步减小波动频率 Ω_h 的值, 当 $\Omega_h = 1.45375$ 时, 系统发生 Hopf 分岔, 即系统由周期 4 运动分岔为 4 个 Hopf 吸引不变圈, $\Omega_h = 1.451$ 时的相图见图 3d, 其 Poincaré 映射图见图

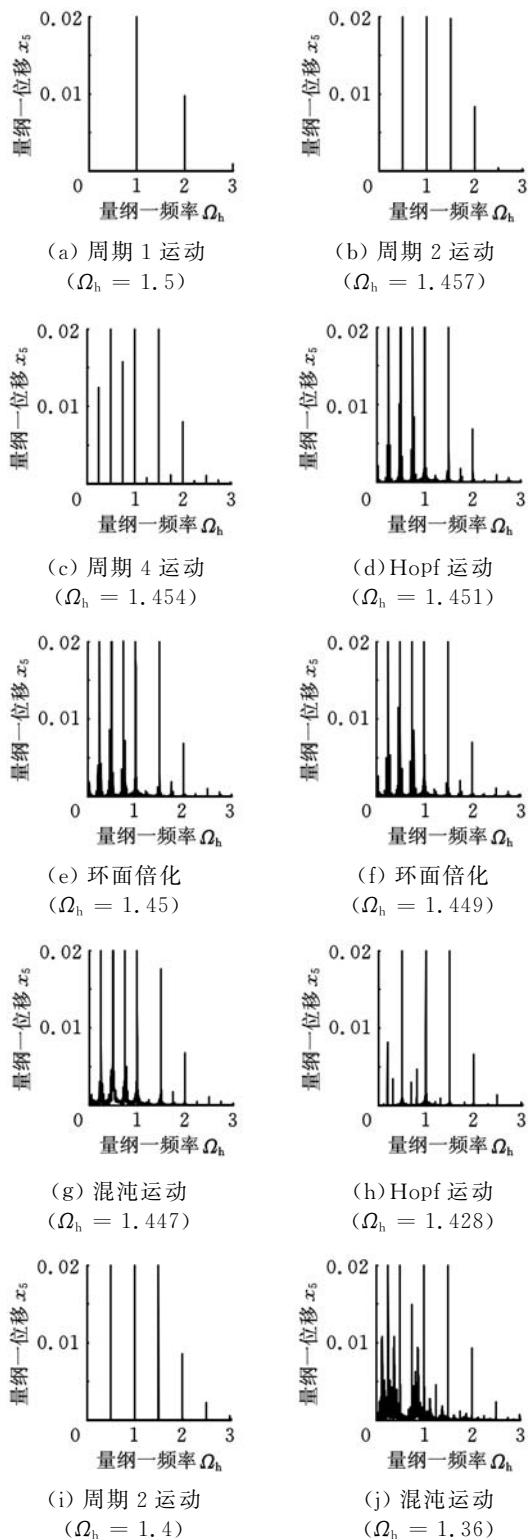


图 5 系统 FFT 频谱图

4c, 表现为 4 个封闭的圈; 其频谱图见图 5d, 频谱表现为多个离散的频率。随着 Ω_h 值的减小, 该 Hopf 运动发生环面倍化分岔, $\Omega_h = 1.45$ 时的相图见图 3e, 其 Poincaré 映射图见图 4d, 表现为分别由两个封闭圈缠绕组成的 4 组封闭图形; 其频谱图见图 5e, 频谱表现为多个离散的频率。继续减小 Ω_h 值, 系统将在较小的范围内迅速发生环面倍化, 最后进入混沌运动, $\Omega_h = 1.449$ 时的 Poincaré

映射图见图 4e, 表现为互相缠绕而封闭的 4 组曲线, 该映射图形状犹如 4 个变形的轮胎; 其频谱图见图 5f, 由于频谱图中的频率为离散频率, 可以推断此时系统运动为拟周期运动。 $\Omega_h = 1.447$ 时的 Poincaré 映射图见图 4f, 表现为 4 组密集的点图, 这是反复环面倍化, 最终导致环面破裂而进入混沌运动; 其频谱图见图 5g, 表现为连续的频谱, 可以推断此时系统运动为混沌运动。 当 $\Omega_h = 1.4315$ 时, 系统的混沌运动退化为 Hopf 运动, $\Omega_h = 1.428$ 时的相图见图 3f, 其 Poincaré 映射图见图 4g, 表现为 2 个封闭的圈; 其频谱图见图 5h, 表现为多个幅值不同的离散频率。 当 $\Omega_h < 1.4271$, 系统的 Hopf 运动转迁为周期 2 运动, $\Omega_h = 1.4$ 时的相图见图 3g, 表现为 2 个相互缠绕的椭圆; 其 Poincaré 映射图见图 4h, 表现为 2 个离散点; 其频谱图见图 5i, 频谱分布在 $n\Omega_h/2$ 频率上。 该周期运动稳定在较长的参数范围内, 直到 $\Omega_h = 1.3855$ 时, 系统发生擦切运动(其相图见图 3h), 由图 3h 可见, 擦切运动发生在 $x_5 = 1.0$, $x_6 = 0$ 处。 擦切运动导致系统运动发生擦切分岔, 从周期 2 运动分岔为周期 8 运动, $\Omega_h = 1.37$ 时的相图见图 3i, 其 Poincaré 映射图见图 4i, 表现为 8 个离散点; 其频谱分布在 $n\Omega_h/8$ 频率上。 $\Omega_h = 1.367$ 时系统运动为周期 16 运动, 随后, 系统运动经倍化分岔进入混沌。 $\Omega_h = 1.36$ 时的相图见图 3j, 其 Poincaré 映射图见图 4j; 其频谱图见图 5j, 表现为多个幅值不同的离散频率。

可见, 随着激励频率的变化, 系统将由稳定的周期 1 经倍化分岔进入周期 4 运动; 随着激励频率的减小, 该周期 4 运动发生 Hopf 分岔进入拟周期运动; 该 Hopf 运动经环面倍化进入混沌运动; 随后, 该混沌运动退化为 Hopf 运动; 随着激励频率的减小, Hopf 运动又转迁为周期 2 运动; 该周期 2 运动随着激励频率的变化发生擦切运动而分岔为周期 8 运动; 随后经倍化分岔进入混沌。

3 结论

本文利用变步长 4—5 阶 Runge—Kutta 法对三自由度单级直齿圆柱齿轮系统的扭转振动状态方程进行了数值求解, 建立了系统的 Poincaré 截面, 给出了齿轮传动相对扭转量纲一速度随激励频率变化的分岔图, 并结合 Poincaré 映射图、相平面图和 FFT 频谱图分析了不同激励频率下系统复杂的运动行为。 研究发现, 随着激励频率

的变化, 系统将出现稳定的周期 1、周期 2、周期 4、周期 8、Hopf 运动及混沌运动等复杂运动。 系统的分岔形式有倍化分岔、Hopf 分岔、环面倍化和擦切分岔等多种形式。 本文分析得到了系统各种分岔的分岔值。

为了突出齿轮侧隙的非线性影响, 忽略了由扭矩波动所引起的低频外激励项, 假设系统激励仅有内部激励及平均力分量, 若将轴承侧隙及扭矩波动引起的低频外激励同时考虑, 则系统将会出现更为复杂的运动, 对此将另文研究。 本文的研究结果对于工程实际中选择合适的齿轮参数值有一定的指导意义。

参考文献:

- [1] Raghothama A, Narayanan S. Bifurcation and Chaos in Geared Rotor Bearing System by Incremental Harmonic Balance Method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 226(3): 469-492.
- [2] Kahraman A, Singh R. Non-linear Dynamics of a Spur Gear Pair[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 142(1): 49-75.
- [3] Vinayak H, Singh R, Padmanabhan C. Linear Dynamic Analysis of Multi-mesh Transmissions Containing External Rigid Gears[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 185(1): 1-32.
- [4] 王立华, 李润方, 林腾蛟, 等. 齿轮系统时变刚度和间隙非线性振动特性研究[J]. 中国机械工程, 2003, 14(13): 1143-1146.
Wang Lihua, Li Runfang, Lin Tengjiao, et al. Research on Nonlinear Vibration Characteristics Due to Time-varying Mesh Stiffness and Gear Backlash in Gear System[J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(13): 1143-1146.
- [5] 杨绍普, 申永军, 刘献栋. 基于增量谐波平衡法的齿轮系统非线性动力学[J]. 振动与冲击, 2005, 24(3): 40-43.
Yang Shaopu, Shen Yongjun, Liu Xiandong. Study on Complex Non-linear Dynamics Rigid Rotor-bearing System[J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(3): 40-43.
- [6] 王晓笋, 巫世晶, 周旭辉, 等. 含间隙非线性齿轮传动系统的分岔与混沌分析[J]. 振动与冲击, 2008, 27(1): 53-56.
Wang Xiaosun, Wu Shijing, Zhou Xuhui, et al. Bifurcation and Chaos in a Nonlinear Dynamic Model of Spur Gear with Backlash[J]. Journal of Vibration and Shock, 2008, 27(1): 53-56.

(下转第 691 页)

- Ontologies Used for Knowledge Sharing[J]. International Journal of Human - Computer Studies, 1995, 43(4/5): 907-928.
- [5] 刘玉生,高曙明,吴昭同,等.一种基于数学定义的三维公差语义表示方法[J].中国机械工程,2003,14(3):241-245.
- Liu Yusheng, Gao Shuming, Wu Zhaotong, et al. A Representation Method of 3D tolerance semantics based on Mathematical Definition[J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(3): 241-245.
- [6] Desrochers A, Clement A. A Dimensioning and Tolerancing Assistance Model for CAD/CAM Systems[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 1994, 9(6): 352-361.
- [7] 刘玉生,杨将新,吴昭同,等. CAD 系统中公差信息建模技术综述[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2001, 13(11): 1048-1055.
- Liu Yusheng, Yang Jianxin, Wu Zhaotong, et al. Survey of Modeling and Representation of Tolerance Information in CAD System[J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2001, 13(11): 1048-1055.
- [8] 刘玉生,高曙明,吴昭同,等. 基于特征的层次式公差信息表示模型及其实现[J]. 机械工程学报, 2003, 39(3): 1-7.
- Liu Yusheng, Gao Shuming, Wu Zhaotong, et al. Hierarchical Representation Model and Its Realization of Tolerance Based on Feature[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(3): 1-7.
- [9] 黄美发,钟艳如. CAD 系统中并行公差的建模方法[J]. 中国机械工程, 2004, 15(18): 1623-1626.
- Huang Meifa, Zhong Yanru. A New Model for Concurrent Tolerancing in CAD System[J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(18): 1623-1626.
- [10] 胡洁,吴昭同. 面向功能的形位公差类型的自动生成[J]. 中国机械工程, 2002, 13(3): 204-207.
- Hu Jie, Wu Zhaotong. Function-oriented Automatic Generation of Geometric Tolerance Types[J]. China Mechanical Engineering, 2002, 13(3): 204-207.
- [11] Mathew A, Rao C S P. A Novel Method of Using API to Generate Liaison Relationships from an Assembly[J]. International Journal of Software Engineering & Applications, 2010, 1(3): 167-175.
- [12] Mathew A, Rao C S P. A CAD System for Extraction of Mating Features in an Assembly[J]. Assembly Automation, 2010, 30(2): 142-146.
- (编辑 袁兴玲)
- 作者简介:钟艳如,女,1965年生.桂林电子科技大学计算机科学与工程学院教授.主要研究方向为知识工程、计算机辅助公差设计、国际新一代GPS等.发表论文40余篇.高文祥,男,1986年生.桂林电子科技大学计算机科学与工程学院硕士研究生.黄美发,男,1962年生.桂林电子科技大学机电工程学院教授.
- ~~~~~
- (上接第 683 页)
- [7] 李明,孙涛,胡海岩. 齿轮传动转子—轴承系统动力学的研究进展[J]. 振动工程学报, 2002, 15(3): 249-256.
- Li Ming, Sun Tao, Hu Haiyan. Review on Dynamics of Geared Rotor—Bearing Systems [J]. Journal of Vibration Engineering, 2002, 15(3): 249-256.
- [8] Joanna M, Martin H, Eddie W R. Mathematical Models of Gear Rattle in Roots Blower Vacuum Pumps[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 308(3/5): 431-440.
- [9] Gianluca L, Marcello M, Carlo R. Modelling of an Automated Manual Transmission System [J]. Mechatronics, 2007, 17(2/3): 73-91.
- [10] Naji Meidani A R, Hasan M. Mathematical and Physical Modelling of Bubble Growth Due to Ultrasound [J]. Applied Mathematical Modelling, 2004, 28(4): 333-351.
- [11] Sun Tao, Hu Haiyan. Nonlinear Dynamics of a Planetary Gear System with Multiple Clearances [J]. Mechanism and Machine Theory, 2003, 38(12): 1371-1390.
- [12] Albert C J L, Chen Lidi. Periodic Motions and Grazing in a Harmonically Forced, Piecewise, Linear Oscillator with Impacts[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 24(2): 567-578.
- [13] Giorgio B, Francesco P. Non-smooth Dynamics of Spur Gears with Manufacturing Errors [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 306(1/2): 271-283.
- [14] 刘梦军,沈允文,董海军. 单级齿轮非线性系统吸引子的数值特性研究[J]. 机械工程学报, 2003, 39(10): 111-116.
- Liu Mengjun, Shen Yunwen, Dong Haijun. Research on Numerical Characters of the Attractors in a Nonlinear Gear System[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2003, 39(10): 111-116.
- (编辑 袁兴玲)
- 作者简介:苟向锋,男,1974年生.兰州交通大学机电工程学院教授.主要研究方向为非线性动力学及控制.发表论文20余篇.吕小红,男,1978年生.兰州交通大学机电工程学院讲师.陈代林,男,1986年生.兰州交通大学机电工程学院硕士研究生.