

# 基于进给速度敏感点识别的 NURBS 曲线平滑插补算法研究

林 峰<sup>1</sup> 张正红<sup>1</sup> 陈 胜<sup>2</sup>

1. 衢州学院, 衢州, 324000 2. 浙江永力达数控机床有限公司, 衢州, 324000

**摘要:**提出了一种基于进给速度敏感点识别的 NURBS 曲线插补算法, 该方法对于兼容 NURBS 形式的高档数控系统至关重要。粗插补计算造成的轮廓误差与插补经过该点时的进给速度大小有关, 敏感点则可根据插补微段逼近时的弓高误差来界定。进而, 根据相邻敏感点之间的距离, 通过增设安全缓冲区等方法, 进行速度曲线自适应规划。整体进给速度曲线可以由各部分进给速度曲线连接而成。为评价算法的有效性, 采用 3 次 NURBS 曲线在三种不同进给速度指令下进行仿真计算。仿真结果证明, 该算法很好地将轮廓精度和进给速度的平滑性进行了系统考虑, 能在相邻危险点复杂分布的情况下执行柔性的插补控制。

**关键词:** NURBS; 敏感点; 弓高误差; 安全缓冲区

**中图分类号:** TP391

**DOI:** 10.3969/j.issn.1004-132X.2012.09.012

## Research on Smooth NURBS Interpolation Algorithm Based on Feedrate Sensitive Point Identification

Lin Feng<sup>1</sup> Zhang Zhenghong<sup>1</sup> Chen Sheng<sup>2</sup>

1. Quzhou University, Quzhou, Zhejiang, 324000

2. Zhejiang Yonglida CNC Machine Tool Co., Ltd., Quzhou, Zhejiang, 324000

**Abstract:** A Non-uniform rational B-spline (NURBS) interpolation algorithm was proposed herein, which was based on the feedrate sensitive point identification. It was crucial for an advanced CNC system compatible with NURBS. The contour errors during rough interpolating calculation were related to the feedrate at the current point, so it was possible to identify the feedrate sensitive points according to the chord error during interpolation approximation. The feedrate profile between any two sensitive points should be designed adaptively according to the distance between them, and the security buffer was used. The whole feedrate profile can be generated by feedrate segments combination. A cubic NURBS curve was used to evaluate the interpolation algorithm, and it was simulated under 3 different feedrate commands. Simulation results show that the algorithm is available and can be implemented flexibly according to the different situations of sensitive points. It is also shown that the proposed algorithm guarantees both the contour precision and feedrate smoothness.

**Key words:** NURBS; sensitive point; chord error; security buffer

## 0 引言

NURBS 为初等解析曲线/曲面和自由曲线/曲面提供了统一的数学表达形式, 以 NURBS 为表达形式的数控代码以其良好的轮廓表征精度和精简的代码量, 已得到越来越多数控系统的支持。对于现代智能化的 CNC 控制器而言, 一个可靠高效的 NURBS 刀路插补控制器至关重要<sup>[1]</sup>。与基于 NURBS 表达的造型技术相比, 基于 NURBS 的插补技术相对滞后, 当前 NURBS 插补算法缺乏对曲线线形良好的自适应性。

Huang 等<sup>[2]</sup>设计了恒定进给速度的插补控制方法, 该方法采用一阶泰勒展开来计算指令步长下 NURBS 曲线上的插补点坐标。为提高计算精度, Yang 等<sup>[3]</sup>提出采用二阶泰勒展开近似求解, 以减小进给速度的波动。Nam 等<sup>[4]</sup>提出了一

种在参数曲线的始末点进行速度光滑处理, 在插补曲线的中间区域保持恒定进给速度的规划方法。Altintas 等<sup>[5]</sup>采用五次样条实现了有加加速度限制的插补, 但该方法只在插补始末段应用, 中间过程未考虑插补精度问题。Yeh 等<sup>[6]</sup>实现了一种进给速率自适应的 NURBS 插补器, 该方法根据弓高误差获得最大允许进给速度值。但该方法没有提供合适的加减速方案, 在步长减小的低速区域附近, 可能出现速度突变。Yong 等<sup>[7]</sup>提出了离线寻找危险点的插补算法, 并对速度变化区域进行加减速控制。Shen 等<sup>[8]</sup>基于进给轴伺服驱动能力角度, 提出了基于轴向加速度、加加速度限制的异步插补算法。

本文提出一种基于进给速度曲线敏感点识别的 NURBS 插补算法。敏感点根据弓高误差在离线处理阶段确定, 此后的进给速度规划即基于此已识别的敏感点。相邻敏感点之间的加减速则根

收稿日期: 2011-12-30

基金项目: 浙江省重大科技专项(2010C11018)

据两点之间的距离进行自适应控制。进而,整个插补进给速度曲线可通过连接所有敏感点区域速度段来完成。

### 1 进给速度敏感点识别

众所周知,加工自由曲线时保持恒定的加工速度将无法限制弓高误差。对于给定的加工轨迹,弓高误差取决于速度曲线,本文将进给速度指令值  $v_F$  下弓高误差超过给定值的点称为敏感点。因此,首先需要正确地计算弓高误差,然后进行速度曲线的正确规划。

传统方法计算弓高误差  $E_i$  时,采用局部区域的圆弧近似方法,表达式如下:

$$E_i = \rho_i - \sqrt{\rho_i^2 - \left(\frac{L_i}{2}\right)^2} \quad (1)$$

$$L_i = v(u_i)T$$

$$\rho_i = 1/K_i$$

$$K_i = \frac{\left(\frac{dC_x(u)}{du} \frac{d^2C_y(u)}{du^2} - \frac{dC_y(u)}{du} \frac{d^2C_x(u)}{du^2}\right) \Big|_{u=u_i}}{\left\| \frac{dC(u)}{du} \right\|_{u=u_i}^3}$$

式中,  $L_i$  为插补周期步长;  $v(u_i)$  为  $C(u_i)$  点的进给速度;  $T$  为恒定的插补周期;  $\rho_i$  为曲线在  $u = u_i$  处的曲率半径。

为了识别整个 NURBS 曲线上的敏感点,有必要在插补开始之前对整个 0 到 1 的参数空间进行离散。参数步长  $\Delta u_i$  越大,越有利于提高计算效率,但为了提高敏感点识别的精度,步长值越小越好。为了在计算效率和识别精度之间获得平衡,通过以下法则来确定参数步长  $\Delta u_i$ :

- (1) 初始参数步长  $\Delta u_i$  预设为  $\Delta u_i = 2\Delta u_{i-1}$ ;
- (2) 如果下式满足:

$$\frac{|l_a(u_i, u_i + \frac{1}{2}\Delta u_i) + l_b(u_i + \frac{1}{2}\Delta u_i, u_i + \Delta u_i) - l_{ab}(u_i, u_i + \Delta u_i)|}{|l_{ab}(u_i, u_i + \Delta u_i)|} \leq \xi \quad (2)$$

式中,  $l_a$  为以  $a$  为起点,参数中点为终点的弦长;  $l_b$  为以参数中点为起点,  $b$  为终点的弦长;  $l_{ab}$  为以  $a$  为起点,  $b$  为终点的弦长;  $\xi$  为逼近误差率。

则接受  $\Delta u_i$  的值,否则执行第(3)步;

- (3) 修正  $\Delta u_i \leftarrow \frac{1}{2}\Delta u_i$ , 然后跳至步骤(2)。

在式(2)中,我们选择  $\xi = 1\%$ 。整个处理过程将在获得合适的参数增量  $\Delta u_i$  之后结束,并以  $C(u_i)$  点离散整个 NURBS 曲线。

如果设定弓高误差的公差为  $E_t$ ,则当  $E_i > E_t$  时,  $C(u_i)$  为敏感点;当  $E_i \leq E_t$  时,  $C(u_i)$  不为敏感点。

若  $C(u_i)$  是敏感点,则该点的最大允许进给速度  $v_s$  可用下式定义:

$$v_s = 2\sqrt{\rho_i^2 - (\rho_i - E_t)^2} / T \quad (3)$$

整个敏感点识别的过程不仅仅是获得一系列的敏感点信息,同时任意两个离散计算点之间的距离信息也被存储,用于后续插补规划。

### 2 敏感点之间的进给速度规划算法

如果敏感点存在,则进给速度不能在整个加工过程中保持恒定的  $v_F$ 。因此,需要在敏感点附近区域进行加减速。然而,NURBS 曲线上相邻两个敏感点之间的距离是不同的,所以加减速方案需要根据不同的情况进行自适应调整。

为了保证加工效率,首先预设  $v_{max} = v_F$ ,同时设置  $j = j_{max}$  来控制加速度变化时保持恒定的加加速度。假设相邻两个敏感点为  $C_{s1}$ 、 $C_{s2}$ ,该两点处的允许进给速度分别为  $v_{s1}$ 、 $v_{s2}$ 。

假设两点之间的距离足够保证进给速度由  $v_{s1}$  加速到  $v_F$  以及由  $v_F$  减速到  $v_{s2}$  进行平滑加减速所需的长度,我们有必要获得完成这两个过程所需的距离。如图 1 所示,在加速阶段,存在  $t_{a1}$ 、 $t_{a2}$ 、 $t_{a3}$  三个时间阶段,分别实现了  $\Delta v_{a1}$ 、 $\Delta v_{a2}$ 、 $\Delta v_{a3}$  的速度变化量。在  $t_{a1}$ 、 $t_{a3}$  阶段,进行速度增加的同时,加速度也在变化。为保证过程的平滑性,加速度以恒定的加加速度  $j = j_{max}$  进行变化。在  $t_{a2}$  阶段,加速度保持为恒定的  $a_{max}$ 。

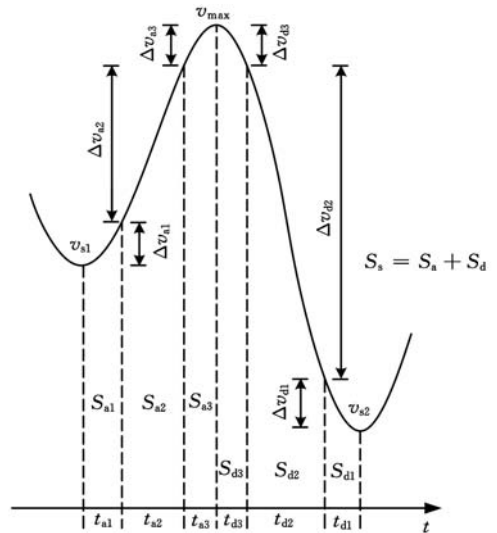


图 1 加减速阶段划分 ( $S_s = S_a + S_d$ )

首先,必须获得  $t_{a1}$ 、 $t_{a3}$  阶段的加速时间:

$$t_{a1} = t_{a3} = a_{max} / j \quad (4)$$

式中,  $t_{a1}$  为加速度从 0 变化到  $a_{max}$  所需的时间;  $t_{a3}$  为从  $a_{max}$  变化到 0 所需的时间。

从图 1 可知:

$$v_{max} = v_{s1} + \Delta v_{a1} + \Delta v_{a2} + \Delta v_{a3} \quad (5)$$

因此

$$v_{max} = v_{s1} + \Delta v_{a1} + \Delta v_{a2} + \Delta v_{a3} =$$

$$v_{s1} + \int_0^{t_{a1}} (\int_0^t j dt) dt + \int_0^{t_{a2}} a_{max} dt + \int_0^{t_{a3}} (\int_0^t j dt) dt = v_{s1} + 2 \int_0^{t_{a1}} (\int_0^t j dt) dt + \int_0^{t_{a2}} a_{max} dt \quad (6)$$

所以  $t_{a2}$  过程可以由下式获得:

$$t_{a2} = [v_{max} - v_{s1} - 2 \int_0^{t_{a1}} (\int_0^t j dt) dt] / a_{max} \quad (7)$$

从  $v_{s1}$  加速到  $v_F$  所需的距离  $S_a$  应为

$$S_a = S_{a1} + S_{a2} + S_{a3} = \int_0^{t_{a1}} [v_{s1} + \int_0^t (\int_0^t j dt) dt] dt + \int_0^{t_{a2}} [v_{s1} + \int_0^{t_{a1}} (\int_0^t j dt) dt + \int_0^t a_{max} dt] dt + \int_0^{t_{a3}} [v_{max} - \int_0^t (\int_0^t j dt) dt] dt \quad (8)$$

同理,对于降速阶段速度曲线,进给速度需要从  $v_F$  平滑过渡到下个敏感点所需速度  $v_{s2}$ 。降速时间  $t_{d1}$ 、 $t_{d3}$  的表示式为

$$t_{d1} = t_{d3} = a_{max} / j \quad (9)$$

$t_{d2}$  的表示式为

$$t_{d2} = [v_{max} - v_{s2} - 2 \int_0^{t_{d1}} (\int_0^t j dt) dt] / a_{max} \quad (10)$$

因此,降速距离  $S_d$  为

$$S_d = S_{d1} + S_{d2} + S_{d3} = \int_0^{t_{d1}} [v_{s2} + \int_0^t (\int_0^t j dt) dt] dt + \int_0^{t_{d2}} [v_{s2} + \int_0^{t_{d1}} (\int_0^t j dt) dt + \int_0^t a_{max} dt] dt + \int_0^{t_{d3}} [v_{max} - \int_0^t (\int_0^t j dt) dt] dt \quad (11)$$

基于以上工作,两个敏感点之间的最小距离可以表达为  $S_a + S_d$ 。设  $S_s$  是两个敏感点之间的实际距离,当满足

$$S_s \geq S_a + S_d \quad (12)$$

时,说明实际距离足够完成进给速度从  $v_{s1}$  到  $v_F$  再到  $v_{s2}$  的转化需要。进而,如果  $S_s > S_a + S_d$ ,意味着进给速度需要在  $t_c$  时段保持恒定的  $v_F$ ,如图 2 所示。

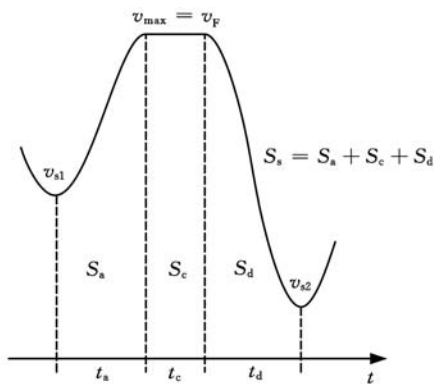


图 2 带恒定速度区域  $v = v_F$  的进给速度曲线 ( $S_s > S_a + S_d$ )

否则,若  $S_s < S_a + S_d$ ,则表示速度无法达到  $v_F$ 。此时,需要调整两敏感点之间最大速度值,  $v_{max} \leftarrow v_{max} \eta$ ,其中,参数  $\eta$  设置为 0.618。

重复式(4)~式(12)的计算,并校验是否满

足式(12)。若不满足,则需要按上述方式进行调整。当满足式(12),保持恒定速度的时间由以下法则确定:

$$t_c = \begin{cases} (S_s - S_a - S_d) / F & v_{max} = v_F \\ \frac{2(S_s - S'_a - S'_d)}{v_{max} + v_{s2}} & v_{max} \neq v_F \end{cases} \quad (13)$$

$v_{max} \neq v_F$  时的  $S'_a$ 、 $S'_d$  与  $v_{max} = v_F$  时的  $S_a$ 、 $S_d$  不同,有  $S'_a < S_a$ 、 $S'_d < S_d$ 。从式(13)可知,若  $v_{max} \neq v_F$ ,并且  $S_s - S'_a - S'_d \neq 0$ ,则存在一个恒速度为  $(v_{max} + v_{s2})/2$  的安全缓冲区域(security buffer),如图 3 所示。如果  $v_{max} \neq v_F$ ,且  $S_s - S'_a - S'_d = 0$ ,则不存在该安全缓冲区,如图 4 所示。

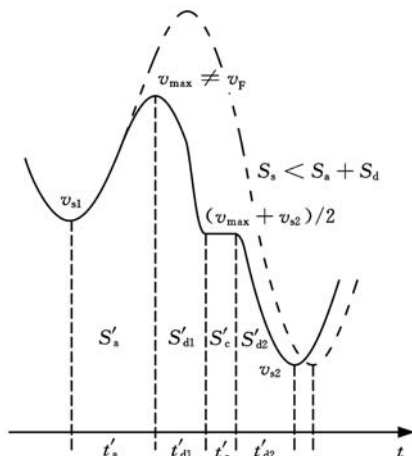


图 3 带安全缓冲区域速度曲线 ( $S_s < S_a + S_d$ )

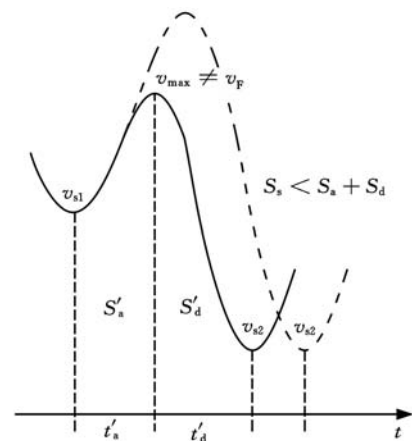


图 4 不带安全缓冲区域速度曲线 ( $S_s < S_a + S_d$ )

在曲线插补的开始阶段,也必须具有加速阶段,尽管第 1 个插补点不必是敏感点。对于曲线末尾阶段情况也一样。但在本算法中,在曲线始末端通过设置  $v_s = 0$  的方法来实现加减速控制。也即是说将始末两点视为敏感点,这样就无需设计专门的算法解决始末端的加减速问题。

### 3 仿真和分析

采用三次 NURBS 曲线来验证本插补算法的有效性。曲线控制参数如表 1 所示。

表 1 NURBS 曲线参数

控制点序号	11	曲线次数	3
参数节点	0,0,0,0,0,1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6,0,8,0,9,1,1,1,1		
权值	1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1		
控制点 X 坐标 (mm)	100,65,45,40,45,90,85,75,50,45,55,110		
控制点 Y 坐标 (mm)	20,30,40,50,65,75,90,105,110,135,150,170		

示例 NURBS 曲线的形貌如图 5 所示,可以看到三个较明显的高曲率区域。事实上,在弓高误差允许值  $E_t = 0.5\mu\text{m}$  时,这些点即为敏感点。

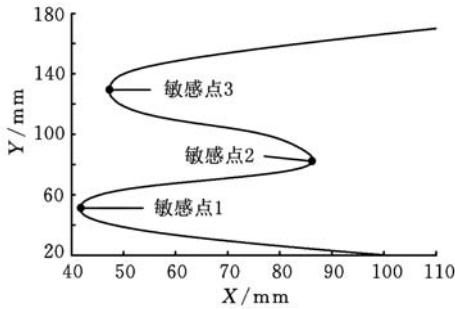


图 5 NURBS 曲线形貌

仿真实验在  $v_F$  为 80mm/s、100mm/s、140mm/s 三个不同的进给速度指令值下实施。仿真使用的加工参数如表 2 所示。

表 2 加工参数

$t$ (s)	$v_F$ (mm/s)	$a_{\max}$ (mm/s <sup>2</sup> )	$j_{\max}$ (mm/s <sup>3</sup> )	$E_t$ ( $\mu\text{m}$ )
0.002	80,100,140	500	5000	0.5

图 6~图 8 所示为不同进给速度指令值  $v_F$  条件下的插补速度  $v_t$  曲线,从中可以看出,敏感点的存在与否(或者其位置)在不同的进给速度指令值条件下可能发生变化,特别地,在  $v_t = 80\text{mm/s}$  以下时,该 NURBS 曲线不存在敏感点。

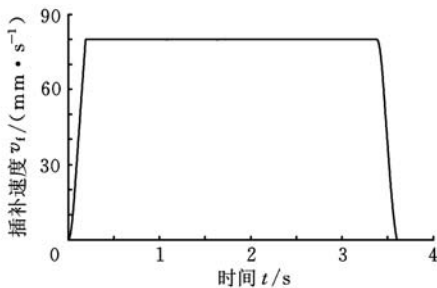


图 6  $v_F = 80\text{mm/s}$  时的插补速度曲线

图 9~图 11 所示为不同进给速度指令值  $v_F$  条件下的轮廓误差。可以看出,弓高误差被严格限制在  $0.5\mu\text{m}$  以内。尽管在敏感点处,弓高误差和速度的预设值是通过式(3)确定的,但由于插补计算时,两点之间的距离不是严格的精确值,当插补计算到达敏感点时,实际速度已经与式(3)的预设值产生了差异。

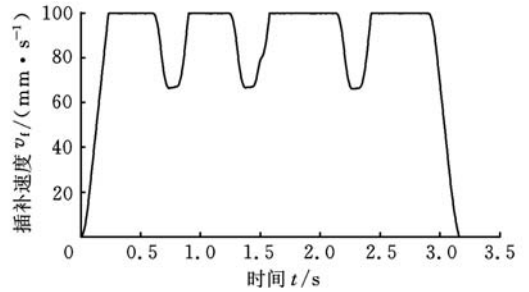


图 7  $v_F = 100\text{mm/s}$  时的插补速度曲线

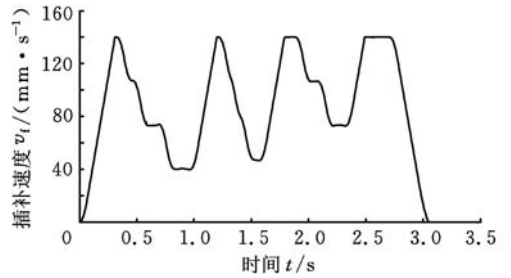


图 8  $v_F = 140\text{mm/s}$  时的插补速度曲线

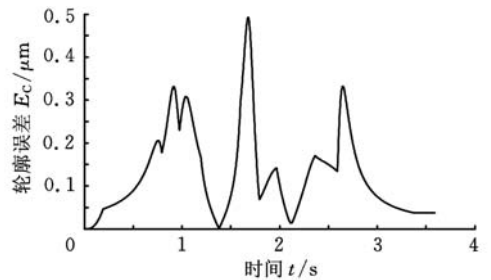


图 9  $v_F = 80\text{mm/s}$  时的轮廓误差

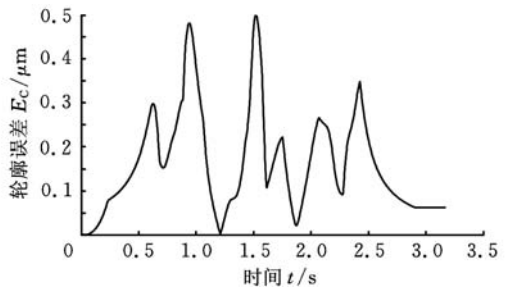


图 10  $v_F = 100\text{mm/s}$  时的轮廓误差

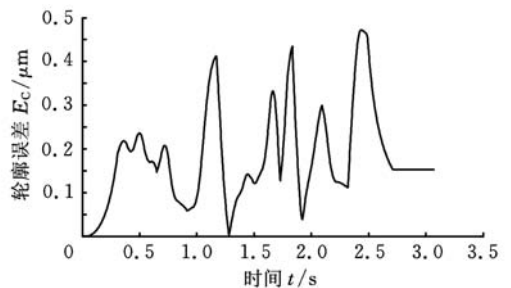


图 11  $v_F = 140\text{mm/s}$  时的轮廓误差

#### 4 结语

本文提出的基于进给速度曲线敏感点识别的插补方法,可以有效地确定高曲率区域的速度敏

感点。在兼顾计算效率和识别准确性的问题上,本文设计了可靠的法则以确定参数步长增量。同时,设计了一套在两个相邻的速度敏感点之间进行自适应速度规划的算法,提出采用安全缓冲区的方法进行距离自适应。算法不仅考虑了插补加工的平滑性和安全性,同时兼顾加工精度和效率。NURBS 插补仿真结果显示,本算法能够有效处理敏感点距离与进给速度之间存在复杂关系的不同情况。

#### 参考文献:

- [1] Lei W T, Sung M P, Lin L Y, et al. Fast Real-time NURBS Path Interpolation for CNC Machine Tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2006, 43: 1-12.
- [2] Huang J, Yang D. A Generalized Interpolator for Command Generation of Parametric Curves in Computer Controlled Machines[C]//ASME Japan/USA Symposium on Flexible Automation. San Francisco, CA, USA, 1992: 286-292.
- [3] Yang D, Kong T. Parametric Interpolator Versus Linear Interpolator for Precision CNC Machining [J]. Comput - Aided Design, 1994, 26 (3): 225 - 233.
- [4] Nam S H, Yang M Y. A Study on a Generalized Parametric Interpolator with Real-time Jerk-limited Acceleration [J]. Computer - Aided Design, 2004, 36(1): 27-36.
- [5] Erkorkmaz K, Altintas Y. High Speed CNC System Design. Part I: Jerk Limited Trajectory Generation and Quintic Spline Interpolation [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2001, 41: 1323-1345.
- [6] Yeh S, Hsu P. Adaptive-feedrate Interpolation for Parametric Curves with a Confined Chord Error [J]. Computer - Aided Design, 2002, 34(2): 229-237.
- [7] Yong T, Narayanaswami R. A Parametric Interpolator with Confined Chord Errors, Acceleration and Deceleration for NC Machining [J]. Computer - Aided Design, 2003, 35(13): 1249-1259.
- [8] Shen Hongyao, Fu Jianzhong, Chen Zichen. Axis-based Look-ahead Interpolator for Machining of Surfaces Represented by Nurbs Curves [J]. Machining Science and Technology, 2008, 12(4): 546-562.

(编辑 郭伟)

作者简介: 林峰,男,1969年生。衢州学院机械工程学院副教授、高级工程师。主要研究方向为数控技术、精密加工技术。发

表论文 20 余篇。张正红,女,1972年生。衢州学院化学与材料工程学院高级实验师。陈胜,男,1973年生。浙江永力达数控机床有限公司工程师。

(上接第 1020 页)

### 3 结语

本文根据某课题对动载体光电平台隔振效果验证的需求,设计了一种用直线位移传感器测试平台动态线位移、角位移的方法,分析了传感器参数与测试系统精度的相互关系。该方法利用刚体动力学的基本原理建立平台惯性坐标系、平台固连坐标系和传感器平面坐标系,再通过坐标变换建立各坐标系的相互关系,推导出传感器测试信号与平台线位移、角位移的关系式。测试时,仅需要测得各传感器的信号值,就可以计算平台的 6 个自由度的位移,方便有效,操作简单。选用宽频域传感器可实时测试高频率振动下平台的位移参数,对高频振动环境下平台线位移,尤其是角位移的测试有较大的应用价值。

#### 参考文献:

- [1] 张葆,贾平,黄猛. 动载体成像模糊的振动被动控制技术[J]. 光学技术, 2003, 29(3): 281-283.
- [2] 段志姣,王宇. 机载光电系统稳定精度测试方法[J]. 光电与光学工程, 2008, 6(3): 53-56.
- [3] 杨波,陈就. 一种双速同步机轴角位移高精度测量系统[J]. 微电机, 2010, 43(4): 77-79.
- [4] 乐开端,曹建安,周翔,等. 高精度激光测角技术研究[J]. 光子学报, 2004, 33(9): 1108-1110.
- [5] 王雁,赵忠杰,马社. 光电平台微角振动激光探测方法研究[J]. 强激光与粒子束, 2007, 19(1): 40-44.
- [6] 贾书惠. 刚体动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [7] 刘福强,张令弥. 作动器/传感器优化配置的研究进展[J]. 力学学报, 2000, 30(4): 64-69.
- [8] 张春良. 微制造平台振动主动控制研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2003.
- [9] 陶帅. 六自由度压电微动平台主动隔振技术研究[D]. 石家庄: 军械工程学院, 2010. (编辑 王艳丽)

作者简介: 李玉龙,男,1986年生。军械工程学院研究生一队硕士研究生。主要研究方向为振动冲击防护与动载体角振动隔振。何忠波,男,1968年生。军械工程学院一系副教授。白鸿柏,男,1964年生。军械工程学院自行火炮教研室教授。郝慧荣,男,1981年生。军械工程学院研究生五队博士研究生。陶帅,男,1985年生。军械工程学院研究生四队博士研究生。刘树峰,男,1987年生。军械工程学院研究生一队硕士研究生。