区间不确定系统迭代学习控制的单调收敛性

李宏胜　刘　娣　滕福林　黄家才　张建华

南京工程学院，南京，211167

摘要：针对离散线性时不变系统，研究了参数区间不确定迭代学习控制系统(IILC)的单调收敛性条件，并针对常见的离散PD型ILC算法，给出了在l_∞范数意义下区间不确定迭代学习控制系统单调收敛性的判断方法，数字仿真结果证明了其有效性。

关键词：区间迭代学习控制；单调收敛；离散线性时不变系统；区间不确定

中图分类号：TP13；TP242　　　　DOI：10.3969/j.issn.1004－132X.2012.09.002

On Monotonic Convergence of Iterative Learning Control for Interval Uncertainty Discrete－time System

Li Hongsheng　Liu Di　Teng Fulin　Huang Jiacai　Zhang Jianhua

Nanjing Institute of Technology，Nanjing，211167

Abstract：Monotonic convergence of interval iterative learning control for discrete linear time invariant system with interval uncertainty was discussed. For commonly used algorithms of discrete PD iterative learning control，the monotonic convergence condition in the l_∞－norm topology was checked specially. Simulation results show that the approach is effective.

Key words：interval iterative learning control；monotonic convergence；discrete linear time invariant system；interval uncertainty

0　引言

许多运动控制系统需进行沿某轨迹的重复运动，例如数控机床沿一定的轨迹重复加工零件，机械手重复执行某一运动过程。通常的控制算法并未考虑此类运动的重复特性，每一次运行跟随误差都重复产生，跟踪精度不高。而且由于控制对象存在非线性因素且模型具有不确定性，因而使得设计高性能的常规控制器较为困难。迭代学习控制是一种较新的智能控制方法，它首先由Arimoto[1]提出并应用于机械手的控制中。近年来迭代学习控制理论体系越来越成熟[2]，应用日益广泛。

迭代学习控制的基本思想是，通过学习每次运动的误差，对控制量进行前馈修正，从而在下次运动时提高运动的精度。它不需要精确的系统模型，对系统的未建模特性具有一定的鲁棒性，实时计算量小，在一定的条件下可保证迭代收敛。迭代学习控制通常要求运动轨迹、初始条件和系统特性具有重复性，并要有足够的存储器来存储上次运动控制的信息[3-4]。

概率方法、模糊方法和区间方法是目前不确定性建模的三种主要方法。概率方法和模糊方法

收稿日期：2011—02—10

基金项目：国家自然科学基金资助项目（61104085）；江苏省自然科学基金资助项目（BK2009350，BK2011689）

[6]　Fan S T，Yang W P，Dong C J. RTCP Function in Five－axis Machining[J]. Key Engineering Materials，2011，464：254-259.

[7]　耿聪，于东，张晓辉. 五轴联动数控加工中的刀具轨迹控制算法[J]. 中国机械工程，2010，21(24)：2904-2909.

[8]　Lee Y S，Chang T C. 2－phase Approach to Global Tool Interference Avoidance in 5－axis Machining[J]. Computer－Aided Design，1995，27(10)：715-729.

[9]　Ho S，Sarma S，Adachi Y. Real－time Interference Analysis Between a Tool and an Environment[J]. Computer－Aided Design，2001，33(13)：935-947.

[10]　Oleg I，Gershon E，Dan H，et al. Precise Global Collision Detection in Multi－axis NC－machining[J]. Computer－Aided Design，2005，37(9)：909-920.

[11]　Ron W，Gershon E. Continuous Path Verification in Multi－axis NC－machining[J]. International Journal of Computational Geometry and Applications，2005，15(4)：351-377.

（编辑　王艳丽）

作者简介：章永年，男，1984年生。南京航空航天大学机电学院博士研究生。主要研究方向为数控技术、机电控制及其自动化。发表论文5篇。赵东标，男，1963年生。南京航空航天大学机电学院教授、博士研究生导师。陆永华，男，1977年生。南京航空航天大学机电学院副教授。刘　凯，男，1981年生。南京航空航天大学机电学院副教授。

均需要有足够的数据来分别确定不确定结构参数的概率密度或隶属度函数，区间方法是把这些不确定性结构参数视为未知变量，并在具有已知边界的区间内取值。参数区间不确定性迭代学习控制系统收敛性的研究主要集中在稳定性(asymptotic stability)和单调收敛性(monotonic convergence)上。本文讨论了参数区间不确定性迭代学习控制系统(IILC)的单调收敛性问题。

1　迭代学习控制的单调收敛性

z 传递函数描述的离散线性时不变系统为

$$Y(z)=H(z)U(z)=(h_1z^{-1}+h_2z^{-2}+h_3z^{-3}+\cdots)U(z) \tag{1}$$

其中，h_i 为 $H(z)$ 的 Markov 参数，理想输出信号为 $y_{\mathrm{d}}(t)$，第 k 次迭代学习控制的输入、输出分别为 $u_k(t)$、$y_k(t)$，$e_k(t)=y_{\mathrm{d}}(t)-y_k(t)$，$t$ 为离散时间变量，$t\in[0,N]$。

定义超向量(Supervectors)[5-9]：

$$\boldsymbol{U}_k=(u_k(0),u_k(1),\cdots,u_k(N-1))^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{Y}_k=(y_k(1),y_k(2),\cdots,y_k(N))^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}=(y_{\mathrm{d}}(1),y_{\mathrm{d}}(2),\cdots,y_{\mathrm{d}}(N))^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{E}_k=(e_k(1),e_k(2),\cdots,e_k(N))^{\mathrm{T}}$$

则 $\boldsymbol{Y}_k=\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{U}_k$，其中 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}$ 为由系统 Markov 参数组成的 $N\times N$ 矩阵：

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_N & h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_1 \end{bmatrix}$$

迭代 ILC 算法的目标是根据第 k 次及以前的信息计算出第 $k+1$ 次的控制输入 u_{k+1}，使其收敛至 $u^*(t)$，并使得 $e_k(t)=y_{\mathrm{d}}(t)-y_k(t)$ 收敛到零。超向量法(supervector)将二维(时间轴、迭代轴)问题转换为一维多输入多输出问题。超向量表达的一般迭代学习控制为

$$\boldsymbol{U}_{k+1}=\boldsymbol{U}_k+\boldsymbol{L}\boldsymbol{E}_k \tag{2}$$
$$\boldsymbol{L}=[\gamma_{ij}]_{n\times n}$$

上述学习矩阵 $\boldsymbol{L}$ 的不同选择方法对应不同的 ILC 学习算法，显然，当 $\gamma_{ij}=0(i\neq j)$、$\gamma_{ij}=\gamma(i=j)$ 时为 Arimoto 算法。

定义 $\boldsymbol{T}$ 为列向量 $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2,\cdots,h_N)^{\mathrm{T}}$ 到下三角阵 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}$ 的 Toeplitz 变换，即 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{h})$。

设 $\boldsymbol{l}=[k_1,k_2,\cdots,k_m,0,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{N\times 1}$，$m$ 为 ILC 算法的阶次，取 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{l})$ 为 ILC 算法学习矩阵。

考虑离散高阶 ILC 算法(式(2))，则

$$\boldsymbol{E}_{k+1}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{d}}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{U}_{k+1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{h}_{\mathrm{e}})\boldsymbol{E}_k$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\qquad \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{v}_N-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{l}$$
$$\boldsymbol{v}_N\triangleq(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{N\times 1}$$

因此，ILC 单调收敛的充分必要条件为相应的范数小于1，即

$$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_i<1 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I}_{n\times n}-\begin{bmatrix} h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_2 & h_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_n & h_{n-1} & \cdots & h_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{bmatrix}$$

2　区间鲁棒迭代学习控制的单调收敛性

对于区间矩阵集合：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}=\{\boldsymbol{A}:\boldsymbol{A}=[a_{ij}\in[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]],i,j=1,2,\cdots,n\}$$

其顶点矩阵集合：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{v}}=\{\boldsymbol{A}:\boldsymbol{A}=[a_{ij}\in\{\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}\}],i,j=1,2,\cdots,n\}$$

其中，$\underline{a}_{ij}$，$\overline{a}_{ij}$ 为 a_{ij} 的最小值和最大值，下文其他量的定义与此类同。

对区间鲁棒迭代学习控制系统稳定性和单调收敛性的讨论即为对给定的 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{I}}$ 进行讨论。显然，对 Arimoto 型迭代学习控制，稳定性的充要条件为

$$\max(|1-\gamma_{ii}\underline{h}_1|,|1-\gamma_{ii}\overline{h}_1|)<1\qquad i=1,2,\cdots,n$$

对一般区间鲁棒迭代学习控制，设 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\otimes\boldsymbol{L}$，则其稳定性的充要条件为 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{L}$ 的谱半径小于1。而区间矩阵 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{I}}\otimes\boldsymbol{L}$ 的谱半径为 $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{P}^{\mathrm{v}}$ 的某个谱半径。

根据定理(证明略)：x_i 为具有区间不确定性的参数，$x_i\in[\underline{x}_i,\overline{x}_i]$，$i=1,2,\cdots,m$。$y=|k_{10}+k_{11}x_1+\cdots+k_{1n}x_n|+|k_{20}+k_{21}x_1+\cdots+k_{2n}x_n|+\cdots+|k_{m0}+k_{m1}x_1+...+k_{mn}x_n|$，$\forall k_{ij}\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=0,1,\cdots,n$。

当 x_i 为某顶点向量时，即 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{v}}=(\{\underline{x}_1,\overline{x}_1\},\{\underline{x}_2,\overline{x}_2\},\cdots,\{\underline{x}_m,\overline{x}_m\})$ 时，y 达到最大值 $y_{\max}$。由此定理可知：对 $h_i\in h_i^{\mathrm{I}}=[\underline{h}_i,\overline{h}_i]$，$i=1,2,\cdots,m$($h_i$ 为具有区间不确定性的 Markov 参数)，当

$$\max(\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Gamma}\|_\infty,\forall\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\in\boldsymbol{H}^{\mathrm{I}})=$$
$$\max(\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{\Gamma}\|_\infty,\forall\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\in\boldsymbol{H}^{\mathrm{v}})<1 \tag{4}$$

时区间鲁棒迭代学习控制系统 l_∞ 范数意义单调收敛，其中，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{v}}$ 为 Markov 顶点矩阵。对离散高阶 ILC 算法(式(2))，PD 型 ILC 算法($m=2$)为[6]

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+k_2e_k(t)+k_1e_k(t+1)=$$
$$u_k(t)+k_{\mathrm{p}}e_k(t)+k_{\mathrm{d}}(e_k(t+1)-e_k(t)) \tag{5}$$

其中，$k_1=k_{\mathrm{d}}$，$k_2=k_{\mathrm{p}}-k_{\mathrm{d}}$。则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}$ 各行为

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_1=(1-h_1k_1,0,0,\cdots,0)$$
$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_2=(-(h_2k_1+h_1k_2),1-h_1k_1,0,0,\cdots,0)$$
$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_3=(-(h_3k_1+h_2k_2),-(h_2k_1+h_1k_2),1-h_1k_1,0,0,\cdots,0)$$

$\vdots$

$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_n=(-(h_nk_1+h_{n-1}k_2),-(h_{n-1}k_1+h_{n-2}k_2),1-h_1k_1,0,0,\cdots,0)$

因此,有

$$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=\max(\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_1\|_1,\ \|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_2\|_1,\cdots,\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L})_n\|_1)$$

对于 $h_i\in h_i^{\mathrm{I}}=[\underline{h_i},\overline{h_i}]$,可在 $\boldsymbol{h}^{\mathrm{v}}=(\{\underline{h_1},\overline{h_1}\},\{\underline{h_2},\overline{h_2}\},\cdots,\{\underline{h_n},\overline{h_n}\})$ 的顶点集合中计算以上范数,从而判断其单调收敛性。

3　数字仿真研究

对离散线性系统 z 传递函数 $H(z)=\dfrac{z-a}{(z-0.5)(z-0.9)}$,$a$ 为区间不确定参数,$a\in[0.55,0.80]$,采样周期为 0.1s。当 $a=0.80$、0.72、0.55 时,系统脉冲传递函数如图 1～图 3 所示,此脉冲传递函数决定了 $H(z)$ 的 Markov 参数。为简化计算,下面范数计算取 Markov 参数前 9 项。理想轨迹 $y_{\mathrm{d}}(t)$ 为正弦函数曲线,迭代次数为 50。

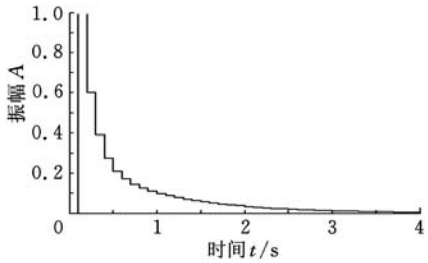

图 1　系统脉冲传递函数($a=0.80$)

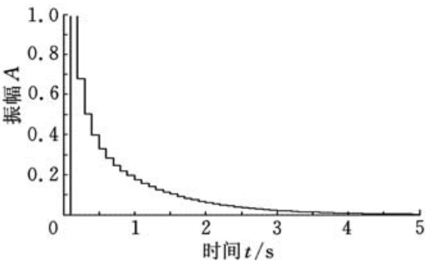

图 2　系统脉冲传递函数($a=0.72$)

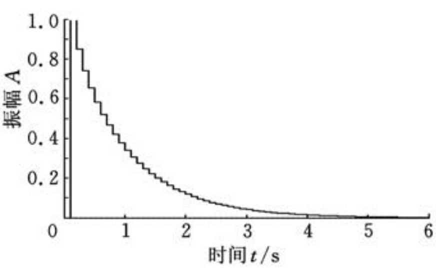

图 3　系统脉冲传递函数($a=0.55$)

对上述区间不确定系统 $a\in[0.55,0.80]$,采用式(5)离散二阶 ILC 算法:

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+k_1e_k(t+1)+k_2e_k(t)$$

(1) 选取控制参数 $k_1=0.90$、$k_2=-0.59$[6],当 $a=0.80$(上界)时,$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=0.28<1$,其输出轨迹及轨迹误差范数如图 4、图 5 所示。可见,迭代学习控制取得了良好的单调收敛性能。当 $a=0.72$ 时,$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=0.46<1$,其轨迹误差范数如图 6 所示。当 $a=0.55$(下界)时,$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=1.07>1$,其轨迹误差范数如图 7 所示。可见,当参数区间变化至下界时,不满足式(4)条件,迭代学习控制不满足单调收敛的要求。

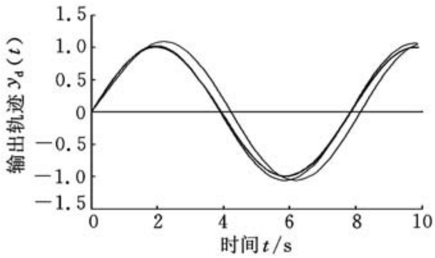

图 4　随迭代次数增加,系统输出曲线

($a=0.80,k_1=0.90,k_2=-0.59$)

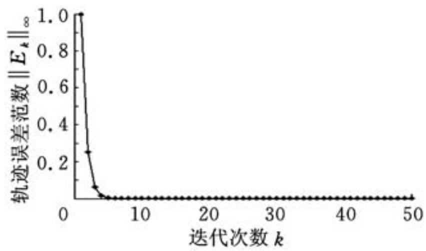

图 5　随迭代次数增加,误差范数的变化

($a=0.80,k_1=0.90,k_2=-0.59$)

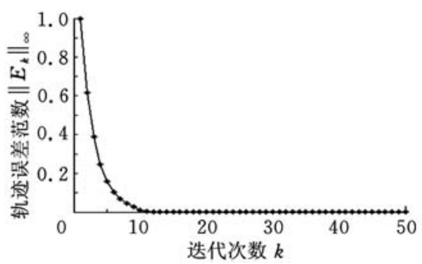

图 6　随迭代次数增加,误差范数的变化

($a=0.72,k_1=0.90,k_2=-0.59$)

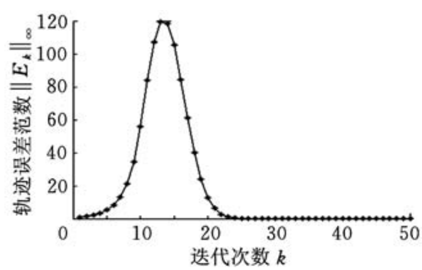

图 7　随迭代次数增加,误差范数的变化

($a=0.55,k_1=0.90,k_2=-0.59$)

(2) 选取 $k_1=0.80$、$k_2=-0.59$,当 $a=0.80$(上界)时,$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=0.41<1$,其输出

轨迹及轨迹误差范数如图 8、图 9 所示。当 $a=0.72$，$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=0.34<1$，其输出轨迹及轨迹误差范数如图 10 所示。当 $a=0.55$（下界）时，$\|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}_{\mathrm{p}}\boldsymbol{L}\|_{\infty}=0.746<1$，其轨迹误差范数如图 11 所示。可见，当参数取上下界时，均满足式(4)条件，迭代学习控制满足区间单调收敛的要求。

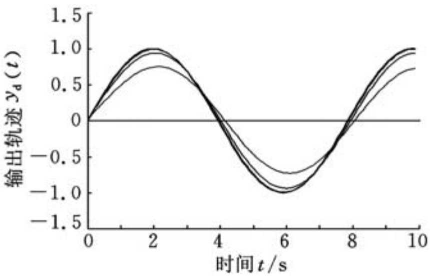

图 8　随迭代次数增加，系统输出曲线

$(a=0.80, k_1=0.80, k_2=-0.59)$

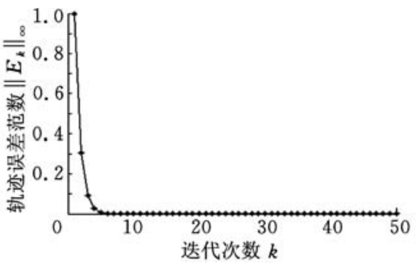

图 9　随迭代次数增加，误差范数的变化

$(a=0.80, k_1=0.80, k_2=-0.59)$

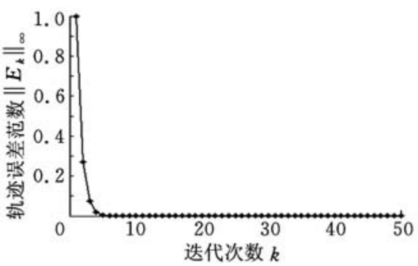

图 10　随迭代次数增加，系统输出曲线

$(a=0.72, k_1=0.80, k_2=-0.59)$

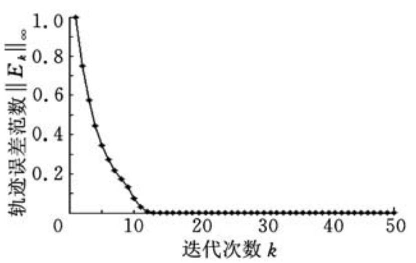

图 11　随迭代次数增加，误差范数的变化

$(a=0.55, k_1=0.80, k_2=-0.59)$

4　结语

本文研究了区间不确定离散线性时不变系统的鲁棒迭代学习控制(IILC)算法的单调收敛性，并针对常见的离散 PD 型 ILC 算法，给出了在 l_∞ 范数意义下区间不确定性迭代学习控制系统单调收敛性的判断方法。仿真实例说明，当 Markov 参数组成的顶点矩阵满足单调收敛性条件时，区间不确定系统的迭代学习控制具有鲁棒单调收敛性。

参考文献：

[1] Arimoto S，Kawamura S，Miyazaki F. Bettering Operation of Robots by Learning[J]. Journal of Robotic Systems，1984，1(2)：123-140.

[2] Moore K L，Xu Jianxin. Special Issue on Iterative Learning Control[J]. Int. J. Control，2000，73(10)：819-823.

[3] Moore K L. An Observation about Monotonic Convergence in Discrete－time，P－type Iterative Learning Control[C]//Proceedings of IEEE Int. Symposium on Intelligent Control(ISIC'01). Mexico，2001：45-49.

[4] 许顺孝，扬富文. 不确定线性系统迭代学习控制器的设计[J]. 控制理论与应用，2002，19(4)：650-652.

[5] Chen Yangquan，Moore K L. An Optimal Design of PD－type Iterative Learning Control with Monotonic Convergence[C]//Proceedings of the 2002 IEEE International Symposium on Intelligent Control. Vancouver，Canada，2002：27-30.

[6] 李宏胜. 离散系统单调收敛高阶迭代学习控制[J]. 机械工程学报，2006，42(6)：72-76.

[7] Moore K L，Chen Yangquan. On Monotonic Convergence of High Order Iterative Learning Update Laws[C]// 2002 IFAC 15th Triennial World Congress. Barcelona，Spain，2002：21-26.

[8] Moore K L，Chen Yangquan. A Separative High－order Framework for Monotonic Convergent Iterative Learning Controller Design[C]// Proceedings of the American Control Conference. Denver，Colorado，USA，2003：3644-3649.

[9] Moore K L. Multi－loop Control Approach to Designing Iterative Learning Controllers[C]//Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control. Tampa，Florida，USA，1998：666-671.

（编辑　王艳丽）

作者简介：李宏胜，男，1966 年生。南京工程学院自动化学院教授、博士。主要研究方向为运动控制、数控技术、智能控制及自动化装置。发表论文 70 余篇。**刘　娣**，女，1983 年生。南京工程学院自动化学院讲师、博士。**滕福林**，男，1978 年生。南京工程学院自动化学院讲师、博士。**黄家才**，男，1977 年生。南京工程学院自动化学院副教授、博士。**张建华**，男，1970 年生。南京工程学院自动化学院副教授、博士。