

# 一种四自由度并联机构的性能指标分析

季 晔 刘宏昭 原大宁 王庚祥

西安理工大学, 西安, 710048

**摘要:** 通过改变并联机构的拓扑结构, 得到了一种具有空间四自由度的并联机构。根据位置关系方程, 通过理论推导, 得到了机构速度和加速度映射解析方程, 同时求出了机构的一阶和二阶影响系数矩阵。综合分析了机构的运动学和动力学性能指标, 得到了影响多种性能指标的敏感因素。考虑量纲的不同, 将 Jacobian 矩阵分离, 在动平台任务空间内, 研究了决定速度和力、角速度和力矩的性能指标。提出了对 Hessian 矩阵采用“分层”研究的方式, 在任务空间内, 得到了各支链扰动对机构加速度和惯性力性能的影响程度。研究结果为机构的设计和优化以及控制策略的选择提供了理论依据。

**关键词:** 四自由度; 影响系数矩阵; 性能指标; 并联机构

中图分类号: TP24

DOI: 10.3969/j.issn.1004-132X.2012.03.002

## Analyses for Performance Indices of a Four-DOF Parallel Manipulator

Ji Ye Liu Hongzhao Yuan Daning Wang Gengxiang

Xi'an University of Technology, Xi'an, 710048

**Abstract:** A spatial 4-DOF parallel manipulator was deduced in the event that the topology of parallel manipulator was changed. Based on the equation of position, the mapping analytic equation of velocity and acceleration was built by theoretical derivation, and simultaneously the first and second order influence coefficient matrixes were solved. Performance indexes of kinematics and dynamics were multianalyzed, and the factors that output perturbation affects the sensitivity of inputs perturbation were received. Taking different units into account, a matrix of Jacobian was detached, and then performance indexes of velocity, force, angular velocity and moment were analyzed in task workspace of the motion platform. A method of stratifiedly researching the matrix of Hessian was proposed in order to calculate perturbation of each limp differing in the degree in acceleration and inertial force performance indexes in task workspace of motion platform. The results provide theoretic proof for designing and optimizing the mechanism and choice of control strategy.

**Key words:** four DOFs; influence coefficient matrix; performance index; parallel manipulator

## 0 引言

机构的性能评价是机器人研究的重要内容之一, 它对结构参数的选取和控制策略的拟定具有

决定性作用。为了量化机构动力学性能, 很多学者都曾做过相关研究。早在 1982 年, Salisbury 等<sup>[1]</sup>采用 Jacobian 矩阵条件数研究了机构运动性能。1983 年, Asada<sup>[2]</sup>采用广义惯性椭球研究了机器人动态性能特性。文献[3]将机构的 Jacobian 矩阵分离, 分别研究了机构的移动性能和转

收稿日期: 2010-12-30

基金项目: 陕西省重点学科建设专项基金资助项目; 陕西高校省级重点实验室科研项目(2010JS080)

## 参考文献:

- [1] 谭伟明, 梁燕飞, 安军, 等. 渐开线非圆齿轮的齿廓曲线数学模型[J]. 机械工程学报, 2002, 38(5): 75-79.
- [2] 赵玉民, 马延会, 华林, 等. 非圆锥齿轮节曲线的平面展开算法研究[J]. 中国机械工程, 2008, 19(17): 2046-2049.
- [3] Xia Jiqiang, Liu Yuanyuan, Geng Chunming, et al. Noncircular Bevel Gear Transmission with Intersecting Axes [J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2008, 130(5): 1-6.
- [4] 姜虹, 王小椿. 三周节变传动比限滑差速器设计与试验[J]. 农业机械学报, 2007, 38(4): 31-34.
- [5] 刘继胜, 罗姜. 非圆齿轮的滚齿加工数控技术研究

[J]. 机床与液压, 2009, 37(9): 62-65.

[6] 吴序堂, 王海贵. 非圆齿轮及非匀速比传动[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.

[7] 夏继强, 耿春明, 宋江滨, 等. 变传动比相交轴直齿锥齿轮副几何设计方法: 中国, 200410009582. 6 [P]. 2006-03-29. (编辑 王艳丽)

**作者简介:** 林 超, 男, 1958 年生。重庆大学机械传动国家重点实验室教授。研究方向为新型齿轮传动系统的设计、分析与制造。获中国专利 2 项。发表论文 50 余篇。龚 海, 男, 1986 年生。重庆大学机械传动国家重点实验室硕士研究生。侯玉杰, 男, 1984 年生。重庆大学机械传动国家重点实验室硕士研究生。中国人民解放军 96263 部队 87 分队副连长。聂 玲, 男, 1989 年生。重庆大学机械传动国家重点实验室硕士研究生。

动性能。文献[4]研究了一种 8PSS 冗余并联机构的动力学特性。近年来很多学者都曾对不同机构的运动特性进行过较为深入的研究<sup>[5-8]</sup>。

少自由度并联机构具有驱动元件少、成本低、结构紧凑和性价比高等优点,是近年来研究的热点<sup>[9]</sup>。为了更好地控制高速精密机器人,多角度研究机构的运动学和动力学性能具有十分重要的意义。本文通过改变 4UPU 机构中某个支链的运动副的布置方式,得到了一种变拓扑结构的具有四自由度的并联机构。根据机构结构特点和运动特性,建立了机构位置反解方程。利用求导法得到了机构一阶、二阶影响系数矩阵,分析了机构的运动学和动力学评价指标,得到了各指标与一阶、二阶影响系数矩阵之间的关系。考虑速度与角速度的量纲不同、力和力矩的量纲亦不同,将雅克比矩阵分离,单独研究机构的转动性能和移动性能。最后采用“分层”研究的方式,得到了机构各运动支链的加速度和惯性力性能评价结果。

## 1 机构结构及自由度分析

### 1.1 机构结构描述

图 1 所示的并联机构由 4 个 UPU 支链连接上下平台构成,其中 3 个支链的 U 副布置方式一致,通过改变另一支链 U 副的空间位置,得到了一种变拓扑结构的并联机构。与运动平台相连的 U 副用  $A_i (i=1,2,3,4)$  表示,与固定平台相连的 U 副用  $B_i (i=1,2,3,4)$  表示。为了便于描述, $A_i$  和  $B_i$  还表示动平台和固定平台与支链的连接点。固定平台几何中心  $O$  为惯性坐标系原点,其中  $x$  轴平行于  $B_1B_2$ ,  $y$  轴平行于  $B_2B_3$ ;运动平台几何中心  $O'$  为动坐标系原点,初始位置时  $x'$  轴平行于  $x$  轴,  $y'$  轴平行于  $y$  轴,利用右手定则确定  $z$  轴。 $A_1B_1$ 、 $A_2B_2$  和  $A_3B_3$  支链的 U 副转动轴线平行于  $x$  轴和  $z$  轴;另外一条支链的 U 副转动轴线平行于  $y$  轴和  $z$  轴。机构动平台边长为  $2a$  和  $2d$ ,固定平台边长为  $2b$  和  $2c$ 。

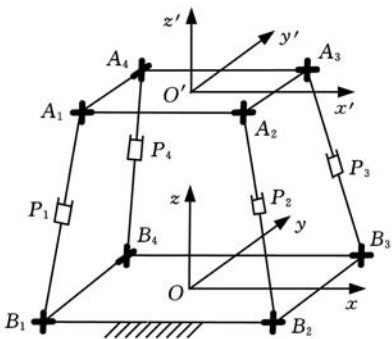


图 1 变拓扑 UPU 并联机构结构简图

### 1.2 机构的结构演绎与自由度分析

原始机构为各支链结构相同的 4-UPU 机构。以  $B_1$  为原点,各坐标轴方向与固定坐标系各轴方向相同建立螺旋坐标系,则  $A_1B_1$  支链运动螺旋为

$$\mathcal{S}_1 = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0)$$

$$\mathcal{S}_2 = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0)$$

$$\mathcal{S}_3 = (0 \ 0 \ 0; \cos\theta_x \ \cos\theta_y \ \cos\theta_z)$$

$$\mathcal{S}_4 = (1 \ 0 \ 0; 0 \ \cos\theta_z \ -\cos\theta_y)$$

$$\mathcal{S}_5 = (0 \ 0 \ 1; \cos\theta_y \ -\cos\theta_x \ 0)$$

反螺旋为

$$\mathcal{S}^{r1} = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0)$$

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$  为支链与固定坐标系相应坐标轴的夹角。每个支链具有相同的反螺旋,因此机构自由度为 5。由于机构只有 4 个驱动支链,此构型下机构不可控。

对机构中某条支链的 U 副进行调整。将  $A_4B_4$  支链的 U 副变为图 1 所示,其运动螺旋为

$$\mathcal{S}_1 = (0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0)$$

$$\mathcal{S}_2 = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0)$$

$$\mathcal{S}_3 = (0 \ 0 \ 0; \cos\theta_x \ \cos\theta_y \ \cos\theta_z)$$

$$\mathcal{S}_4 = (0 \ 1 \ 0; -\cos\theta_z \ 0 \ \cos\theta_x)$$

$$\mathcal{S}_5 = (0 \ 0 \ 1; \cos\theta_y \ -\cos\theta_x \ 0)$$

反螺旋为

$$\mathcal{S}^{r2} = (0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0)$$

此时机构动平台具有 4 个自由度,2 个转动自由度被限制(绕  $x$  轴和  $y$  轴转动)。如果锁住  $A_iB_i$  支链的 4 个移动副,动平台自由度为 0,机构输入合理。

## 2 机构位置关系方程的建立

经分析可知,机构具有空间 3 个移动和 1 个绕  $x$  轴转动的自由度,因此机构的动平台自由度用广义坐标可表示为  $\mathbf{X} = (x, y, z, \alpha)^T$ 。

各支链的矢量为

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{T}_z \mathbf{A}'_i + (x, y, z)^T - \mathbf{B}_i \quad (1)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

其中,  $\mathbf{A}'_i$  为动平台各铰点在动坐标系下的向量;  $\mathbf{B}_i$  为固定平台各铰点在惯性坐标系下的向量;  $(x, y, z)$  为动坐标系原点在固定坐标系下的矢量;  $\mathbf{T}_z$  为动坐标系到惯性坐标系的旋转变换矩阵,即

$$\mathbf{T}_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

式中,  $\alpha$  为动平台绕  $z$  轴转动的欧拉角。

以各支链移动副作为输入,通过改变支链的长度来控制动平台的位姿,各支链长度为

$$l_i = \sqrt{I_i^2(1) + I_i^2(2) + I_i^2(3)} \quad (2)$$

式中,  $I_i(1)$ 、 $I_i(2)$ 、 $I_i(3)$  分别为各支链矢量的第一行、第二行、第三行元素。

### 3 运动影响系数的建立

并联机构的一阶、二阶影响系数求解方法主要有两种: 封闭向量求导法和旋量法。由于已知机构的位置关系方程, 因此采用前者进行求解。

#### 3.1 一阶影响系数矩阵

机构各支链伸缩速度为  $\dot{l}_i$ , 动平台广义速度为  $\dot{\mathbf{X}}$ , 其中

$$\dot{l} = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3 \quad \dot{l}_4]^T$$

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z} \quad \dot{\gamma}]^T$$

机构的输入与输出速度关系满足:

$$\dot{l} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{X}} \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial x} & \frac{\partial l_1}{\partial y} & \frac{\partial l_1}{\partial z} & \frac{\partial l_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial l_2}{\partial x} & \frac{\partial l_2}{\partial y} & \frac{\partial l_2}{\partial z} & \frac{\partial l_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial l_3}{\partial x} & \frac{\partial l_3}{\partial y} & \frac{\partial l_3}{\partial z} & \frac{\partial l_3}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial l_4}{\partial x} & \frac{\partial l_4}{\partial y} & \frac{\partial l_4}{\partial z} & \frac{\partial l_4}{\partial \gamma} \end{bmatrix}$$

当  $\mathbf{J}$  非奇异时, 则

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G} \dot{l} \quad (4)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{J}^{-1}$$

式中,  $\mathbf{J}$  为各支链输入速度对动平台位姿速度的一阶影响系数矩阵;  $\mathbf{G}$  为动平台位姿速度对各支链输入速度的一阶影响系数矩阵, 即通常所说的 Jacobian 矩阵。

#### 3.2 二阶影响系数矩阵

机构的输入和输出之间存在解析关系,  $\mathbf{J}$  和  $\mathbf{G}$  中各元素可表示为

$$J_{ij} = f(x, y, z, \gamma)$$

$$G_{ij} = f(l_1, l_2, l_3, l_4)$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4$$

根据机构输入、输出速度关系方程式(式(3)、式(4)), 分别对时间求导得

$$\ddot{l} = \mathbf{J} \ddot{\mathbf{X}} + [\dot{\mathbf{X}}^T \quad \dot{\mathbf{X}}^T \quad \dot{\mathbf{X}}^T \quad \dot{\mathbf{X}}^T] \mathbf{K} \dot{\mathbf{X}} \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{G} \ddot{l} + [\dot{l}^T \quad \dot{l}^T \quad \dot{l}^T \quad \dot{l}^T] \mathbf{H} \dot{l} \quad (6)$$

$\mathbf{K}$  和  $\mathbf{H}$  可表示为

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2 \quad \mathbf{K}_3 \quad \mathbf{K}_4]^T$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1 \quad \mathbf{H}_2 \quad \mathbf{H}_3 \quad \mathbf{H}_4]^T$$

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{i1}}{\partial x} & \frac{\partial J_{i2}}{\partial x} & \frac{\partial J_{i3}}{\partial x} & \frac{\partial J_{i4}}{\partial x} \\ \frac{\partial J_{i1}}{\partial y} & \frac{\partial J_{i2}}{\partial y} & \frac{\partial J_{i3}}{\partial y} & \frac{\partial J_{i4}}{\partial y} \\ \frac{\partial J_{i1}}{\partial z} & \frac{\partial J_{i2}}{\partial z} & \frac{\partial J_{i3}}{\partial z} & \frac{\partial J_{i4}}{\partial z} \\ \frac{\partial J_{i1}}{\partial \alpha} & \frac{\partial J_{i2}}{\partial \alpha} & \frac{\partial J_{i3}}{\partial \alpha} & \frac{\partial J_{i4}}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_{i1}}{\partial x} & \frac{\partial G_{i2}}{\partial x} & \frac{\partial G_{i3}}{\partial x} & \frac{\partial G_{i4}}{\partial x} \\ \frac{\partial G_{i1}}{\partial y} & \frac{\partial G_{i2}}{\partial y} & \frac{\partial G_{i3}}{\partial y} & \frac{\partial G_{i4}}{\partial y} \\ \frac{\partial G_{i1}}{\partial z} & \frac{\partial G_{i2}}{\partial z} & \frac{\partial G_{i3}}{\partial z} & \frac{\partial G_{i4}}{\partial z} \\ \frac{\partial G_{i1}}{\partial \alpha} & \frac{\partial G_{i2}}{\partial \alpha} & \frac{\partial G_{i3}}{\partial \alpha} & \frac{\partial G_{i4}}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

式(6)和式(5)为机构加速度正逆解方程。 $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{H}$  分别为支链输入加速度对动平台位姿加速度的二阶影响系数矩阵和动平台位姿加速度对各支链输入加速度的二阶影响系数矩阵。 $\mathbf{K}_i$  和  $\mathbf{H}_i$  可作为第  $i$  条支链的二阶影响系数矩阵。

### 4 机构性能评价指标分析

机构的运动性能评价指标主要包括速度、加速度、承载力、驱动力和惯性力等。其中, 速度、承载力、驱动力等由机构的一阶影响系数决定, 而加速度和惯性力不仅与一阶影响系数有关, 还与二阶影响系数有关, 各性能指标分析如下。

#### 4.1 速度性能指标

机构的位置关系方程组两边对时间求导得到机构的速度映射方程, 此方程所表示的关系最为重要, 直接体现了机构运动精度。若机构各支链和动平台的输入和输出扰动为  $\delta \dot{l}$  和  $\delta \dot{\mathbf{X}}$ , 根据式(4), 可得如下关系:

$$\frac{\|\delta \dot{\mathbf{X}}\|}{\|\dot{\mathbf{X}}\|} \leq \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{G}^{-1}\| \frac{\|\delta \dot{l}\|}{\|\dot{l}\|} \quad (7)$$

其中,  $\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{G}^{-1}\|$  是 Jacobian 矩阵的条件数, 表示矩阵计算对误差的敏感性, 是机构运动精度的度量, 记为  $k_G$ 。 $k_G$  越小, 机构的速度偏差越小。

#### 4.2 承载力、驱动力性能指标

机构的承载力是机构动平台承受的广义力, 驱动力为各支链在动平台位于不同位姿时所承受的轴向力。定义支链输入的驱动力为  $f$ , 动平台广义力为  $F$ 。由于机构速度映射与力映射之间存在明显的对偶关系, 则存在

$$F = G^T f$$

因此机构的承载力和驱动力出现扰动, 其性能评价与速度性能指标分析类似。

#### 4.3 加速度性能指标

大多数并联机构的各支链与动平台之间的位置关系可表示为一强耦合的非线性方程组, 输入与输出之间的加速度关系复杂。当各支链存在加速度扰动  $\delta \ddot{l}$  时, 动平台的广义加速度扰动  $\delta \ddot{\mathbf{X}}$  不仅与  $\delta \ddot{l}$  有关, 同时还与速度扰动有关。根据式

(6) 可得

$$\ddot{\mathbf{X}} + \delta\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(\ddot{\mathbf{l}} + \delta\ddot{\mathbf{l}}) + (\dot{\mathbf{L}}^T + \delta\dot{\mathbf{L}}^T)\mathbf{H}(\dot{\mathbf{l}} + \delta\dot{\mathbf{l}}) \quad (8)$$

令

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1 &= \mathbf{G}\ddot{\mathbf{l}} \\ \mathbf{M}_2 &= \dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{H}\dot{\mathbf{l}} \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{M}_1 &= \mathbf{G}(\ddot{\mathbf{l}} + \delta\ddot{\mathbf{l}}) - \mathbf{G}\ddot{\mathbf{l}} = \mathbf{G}\delta\ddot{\mathbf{l}} \\ \delta\mathbf{M}_2 &= \dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{H}\delta\dot{\mathbf{l}} + \delta\dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{H}\dot{\mathbf{l}} + \delta\dot{\mathbf{L}}^T\mathbf{H}\delta\dot{\mathbf{l}} \\ \dot{\mathbf{L}}^T &= [\dot{l}_1^T \quad \dot{l}_2^T \quad \dot{l}_3^T \quad \dot{l}_4^T] \\ \delta\dot{\mathbf{L}}^T &= [\delta\dot{l}_1^T \quad \delta\dot{l}_2^T \quad \delta\dot{l}_3^T \quad \delta\dot{l}_4^T] \end{aligned}$$

存在

$$\frac{\|\delta\mathbf{M}_1\|}{\|\mathbf{M}_1\|} \leq \|\mathbf{G}\| \|\mathbf{G}^{-1}\| \frac{\|\delta\ddot{\mathbf{l}}\|}{\|\ddot{\mathbf{l}}\|} \quad (9)$$

由于

$$\frac{1}{\|\mathbf{M}_2\|} \leq \frac{\|(\dot{\mathbf{L}}^T)^{-1}\| \|\mathbf{H}\|}{\|\dot{\mathbf{l}}\|}$$

即

$$\begin{aligned} \|\delta\mathbf{M}_2\| &\leq \|\dot{\mathbf{L}}^T\| \|\mathbf{H}\| \|\delta\dot{\mathbf{l}}\| + \\ &\|\delta\dot{\mathbf{L}}^T\| \|\mathbf{H}\| \|\dot{\mathbf{l}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{L}}^T\| \|\mathbf{H}\| \|\dot{\mathbf{l}}\| \end{aligned}$$

存在

$$\frac{\|\delta\mathbf{M}_2\|}{\|\mathbf{M}_2\|} \leq [\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\| \|(\dot{\mathbf{L}}^T)^{-1}\| \cdot$$

$$(\|\dot{\mathbf{L}}^T\| \|\delta\dot{\mathbf{l}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{L}}^T\| \|\dot{\mathbf{l}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{L}}^T\| \|\dot{\mathbf{l}}\|)] / \|\dot{\mathbf{l}}\| \quad (10)$$

由式(9)和式(10)可知,加速度的扰动与 $\|\mathbf{G}\| \|\mathbf{G}^{-1}\|$ 和 $\|\mathbf{H}\| \|\mathbf{H}^{-1}\|$ 有关,而 $\|\mathbf{H}\| \cdot \|\mathbf{H}^{-1}\|$ 为 $\mathbf{H}$ 的条件数,记为 $k_H$ 。 $k_G$ 和 $k_H$ 越小,机构的加速度偏差相对越小。

#### 4.4 惯性力性能指标

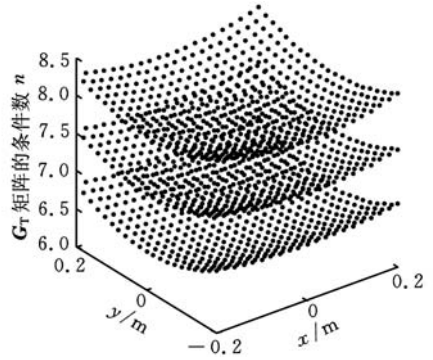
惯性力 $\mathbf{F}$ 为质量与加速度的乘积,质量是不变量,不受扰动的影响。根据前述分析,性能指标需同时包含 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{H}$ ,文献[10]采用 $\mathbf{g} = \|\mathbf{G}\| + \|\mathbf{H}\|$ 作为评价指标。为了得到各支链扰动对惯性力敏感程度,对机构的惯性力性能研究进行改进,采用如下评价方法:

$$\mathbf{g}_i = \|\mathbf{G}_i\| + \|\mathbf{H}_i\| \quad (11)$$

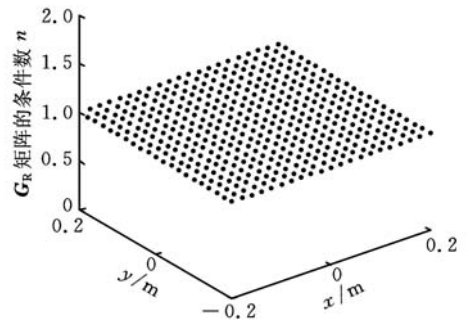
#### 5 机构性能分析结果

图1所示机构的结构参数选取如下: $a = 0.23\text{m}$ , $b = 0.95\text{m}$ , $c = 0.36\text{m}$ , $d = 0.22\text{m}$ 。根据实际任务空间,机构动平台中心点运动范围为 $x, y \in [-0.2\text{m}, 0.2\text{m}]$ ,为了提高计算效率,分析性能指标时,均取 $z$ 等于 $0.9\text{m}$ 、 $1.0\text{m}$ 和 $1.1\text{m}$ 三个运动层为研究对象。机构的Jacobian矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$ ,其中前三行组成 $3 \times 4$ 矩阵,记为 $\mathbf{G}_T$ ;最后一

行为 $1 \times 4$ 矩阵,记为 $\mathbf{G}_R$ 。 $\mathbf{G}_T$ 和 $\mathbf{G}_R$ 具有不同的量纲,分别作为速度和力、角速度和力矩的性能评定指标,因此 $k_G$ 的图谱由两部分组成,结果如图2所示。



(a) 对应 $\mathbf{G}_T$ 的性能指标



(b) 对应 $\mathbf{G}_R$ 的性能指标

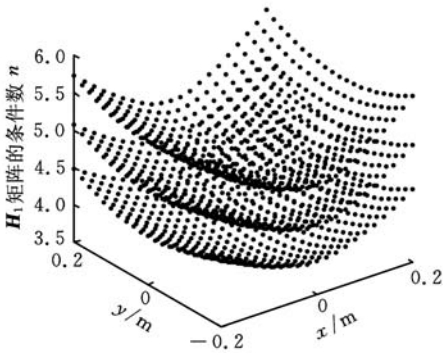
图2  $k_G$ 性能指标图谱

$\mathbf{G}_T$ 的条件数性能图谱空间分布均匀,包含3层连续的曲面,从上到下各层分别对应于 $z$ 等于 $1.1\text{m}$ 、 $1.0\text{m}$ 和 $0.9\text{m}$ 。当动平台位于 $z = 0.9 \sim 1.1\text{m}$ 任务空间内时, $\mathbf{G}_T$ 条件数分布于 $z = 0.9\text{m}$ 和 $z = 1.1\text{m}$ 性能图谱构成的曲面之间;不管机构的动平台位于任务空间的任何位置, $\mathbf{G}_R$ 的条件数均为1。

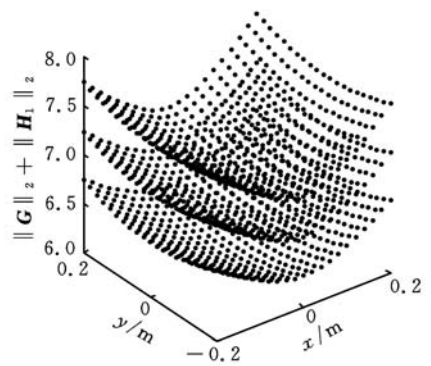
为了更为细致地评定加速度性能指标,采用“分层”研究的方式,说明机构的加速度性能。根据上述分析可知,加速度性能由两部分决定,即输入扰动对 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 的影响。 $\mathbf{M}_1$ 部分的指标分析如图2所示, $\mathbf{M}_2$ 部分的指标分析如图3所示。

$k_{H_i}$ 表示机构的第 $i$ 条支链存在扰动时对 $\mathbf{M}_2$ 的影响程度。第一、第四条支链对应Hessian矩阵的第一和第四层,从图3可以看出,这两条支链存在扰动时对动平台的影响相对较小,而第二、第三条支链存在扰动时,动平台受到的影响相对较大。

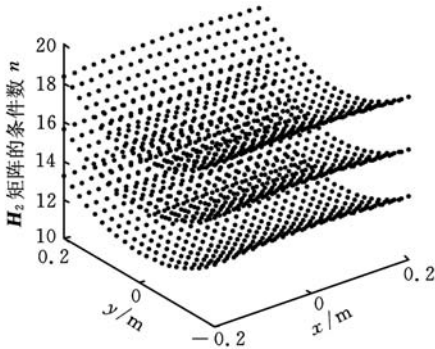
对机构惯性力的性能分析依然采用“分层”研究的方法,各支链的惯性力性能由 $\mathbf{g}$ 决定,计算结果如图4所示。



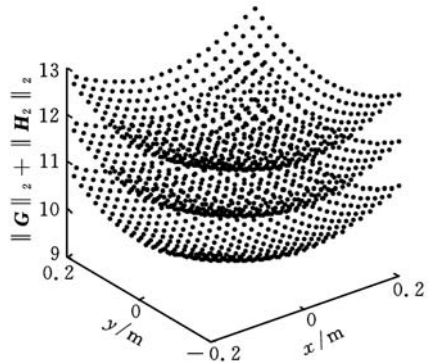
(a)  $A_1B_1$  支链的二阶影响系数性能指标



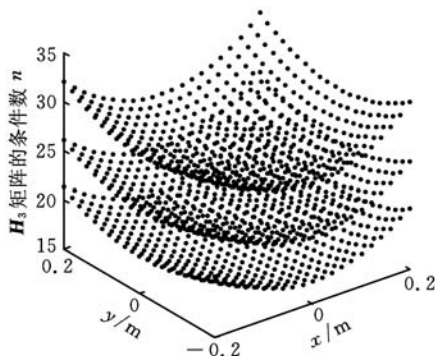
(a)  $A_1B_1$  支链的惯性力性能指标



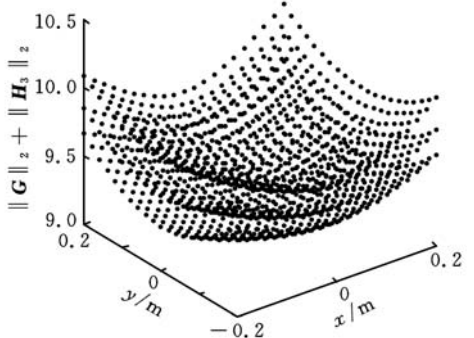
(b)  $A_2B_2$  支链的二阶影响系数性能指标



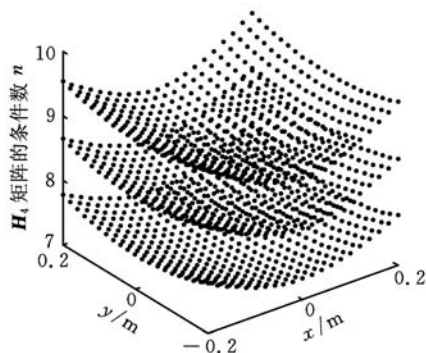
(b)  $A_2B_2$  支链的惯性力性能指标



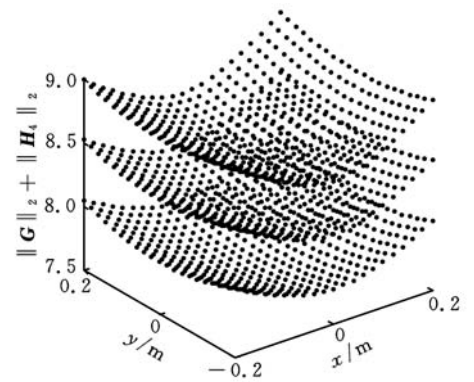
(c)  $A_3B_3$  支链的二阶影响系数性能指标



(c)  $A_3B_3$  支链的惯性力性能指标



(d)  $A_1B_1$  支链的二阶影响系数性能指标



(d)  $A_1B_1$  支链的惯性力性能指标

图 3  $k_{H_i}$  性能指标图谱

图 4 惯性力性能指标图谱

与加速度性能指标类似,第一、第四条支链的惯性力性能较好,其灵敏度和灵巧性好于第二、第三条支链。

在任务空间内,上述各性能指标计算结果范围如表 1 所示。

当运动平台和固定平台结构尺寸  $b$ 、 $c$  和  $d$  恒定,  $a$  分别取 0.2m 和 0.3m 时,机构的  $G_R$  的条件数不变,  $G_T$  的条件数变化很小,  $H_i$  和  $g_i$  的条件数随  $a$  的增大而增大;当运动平台和固定平台结构

表 1 性能指标范围

性能指标	取值范围
$G_T$ 的条件数	6.4286 ~ 8.2997
$G_R$ 的条件数	1
$H_1$ 的条件数	3.6066 ~ 5.7285
$H_2$ 的条件数	11.5748 ~ 18.5834
$H_3$ 的条件数	15.8731 ~ 32.1165
$H_4$ 的条件数	7.1315 ~ 9.5282
$g_1$ 的条件数	6.1532 ~ 7.7390
$g_2$ 的条件数	9.6137 ~ 12.8622
$g_3$ 的条件数	9.1403 ~ 10.0896
$g_4$ 的条件数	7.6712 ~ 8.9952

尺寸  $a$ 、 $b$  和  $c$  恒定,  $d$  取 0.2m 和 0.28m 时, 机构的  $G_R$  的条件数不变,  $G_T$  的条件数逐渐增大, 而  $H_i$  和  $g_i$  的条件数变化复杂, 对应条件数均大于  $d = 0.23m$  时的计算结果, 尤其是  $H_3$  的条件数发生“跳动”, 最大值超过 468; 当运动平台和固定平台结构尺寸  $a$ 、 $c$  和  $d$  恒定,  $b$  取 0.9m 和 1m 时, 机构的  $G_R$  的条件数不变,  $G_T$  的条件数均大于  $b = 0.95m$  时的值, 同时  $H_i$  和  $g_i$  的条件数也有所增大, 其中  $H_3$  的条件数也出现“跳动”, 数值较大; 当运动平台和固定平台结构尺寸  $a$ 、 $b$  和  $d$  恒定,  $c$  取 0.3m 和 0.4m 时, 机构的  $G_R$  的条件数不变,  $G_T$  的条件数均大于  $b = 0.95m$  时的值, 同时  $H_i$  和  $g_i$  的条件数也有所增大, 其中  $H_3$  的条件数依然出现“跳动”, 数值较大。

## 6 结语

通过改变机构一条五自由度并联机构支链的结构, 得到了一种具有 3 个移动和 1 个转动自由度的并联机构。根据该变拓扑结构机构的位置关系方程, 利用求导法得到了机构的正逆 Jacobian 矩阵和 Hessian 矩阵。由于机构的性能指标与两矩阵有直接关系, 针对不同的性能指标, 得到了各指标与两矩阵之间的映射关系。根据不同量纲, 将 Jacobian 矩阵分离, 分析了机构速度、承载力和驱动力性能, 得到了任务空间内一阶性能图谱; 利用“分层”研究的策略, 得到了机构各支链与动平台之间的加速度性能和惯性力性能, 得到了二阶性能图谱。

计算结果表明, 按照文中的尺寸参数选取, 机构各性能指标在任务空间内变化较小且分布均匀, 具有良好的对称性, 运动学和动力学性能较好。如果改变上平台或下平台的某个结构参数可能会使机构某些性能严重下降, 如  $H_3$  的条件数过大, 造成输入和输出之间加速度关系失真。上述分析为机构的结构参数确定提供了依据。

## 参考文献:

- [1] Salisbury J K, Craig J J. Articulated Hands Force Control and Kinematics Issues [J]. International Journal of Robot Research, 1982, 1(1): 4-17.
- [2] Asada H. A Geometrical Representation of Manipulators Dynamics and Its Application to Arm Design [J]. Transaction of ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1983, 105(3): 131-142.
- [3] Philippe C, Samuel B, Clement G. Kinematic - sensitivity Indices for Dimensionally Nonhomogeneous Jacobian Matrices [J]. IEEE Transaction on Robotics, 2010, 26(1): 166-173.
- [4] Zhao Yongjie, Gao Feng. Dynamic Performance Comparison of the 8PSS Redundant Parallel Manipulator and Its Non - redundant Counterpart—the 6PSS Parallel Manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 991-1008.
- [5] Liu Xinjun, Wang Jinsong, Pritschow G. Performance Atlases and Optimum Design of Planar 5R Symmetrical Parallel Mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 41(2): 119-144.
- [6] Imed M, Mohammed O. The Power Manipulability—a New Homogeneous Performance Index of Robot Manipulators [J]. Robotics and Computer - integrated Manufacturing, 2011, 27(2): 434-449.
- [7] Georg N. New Performance Indices for 6 - dof UPS and 3 - dof RPR Parallel Manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(1): 208-221.
- [8] Wu Jun, Wang Jinsong, Wang Liping, et al. Performance Comparison of Three Planar 3 - DOF Parallel Manipulators with 4 - RRR, 3 - RRR and 2 - RRR Structures [J]. Mechatronics, 2010, 20(4): 510-517.
- [9] Xu Qingsong, Li Yangmin. An Investigation on Mobility and Stiffness of a 3 - DOF Translational Parallel Manipulator Via Screw Theory [J]. Robotics and Computer - integrated Manufacturing, 2008, 24(3): 402-414.
- [10] 刘爽, 郭希娟, 刘彬. 4 - RR(RR)R 并联机构的动力学性能指标分析 [J]. 机械工程学报, 2008, 44(7): 63-68.

(编辑 王艳丽)

作者简介: 季 晔, 男, 1982 年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院博士研究生。主要研究方向为机构学与并联机器人理论。刘宏昭, 男, 1954 年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院教授、博士研究生导师。原大宁, 女, 1957 年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院教授。王庚祥, 男, 1985 年生。西安理工大学机械与精密仪器工程学院博士研究生。