基于 Sommerfeld 数的滑动轴承转子系统稳定性分析

徐武彬　王镇江　陈其兵　李　冰　张宏献
广西工学院，柳州，545006

摘要：系统介绍了基于非线性油膜力模型的滑动轴承转子系统稳定性分析方法，提出了基于转子轴心轨迹分析的系统稳定性判定方法及其数学计算方法。在系统分析过程中采用量纲一的 Sommerfeld 数来综合表示系统的主要参数，通过该参数可以很方便地分析计算系统的动力学特性及其稳定性，并给出了系统量纲一的稳定性临界曲线图。

关键词：滑动轴承转子系统；Sommerfeld 数；稳定性；非线性的
中图分类号：TH113　　**文章编号**：1004—132X(2009)23—2875—05

Stability Analysis of Hydrodynamic Journal Bearing System Based on Sommerfeld Number

Xu Wubin　Wang Zhenjiang　Chen Qibing　Li Bing　Zhang Hongxian
Guangxi University of Technology, Liuzhou, Guangxi, 545006

Abstract: The stability analysis method of hydrodynamic journal bearing system based on non-linear oil film force was presented, in which the approach to determine the stability of the system and the mathematical calculating method were introduced. A dimensionless Sommerfeld number was utilized to express the system synthetical parameters. By the Sommerfeld number, the stability and the dynamic characteristics of hydrodynamic journal bearing system can be easily calculated, and a dimensionless stability map of a rigid and symmetrical journal bearing system was presented as an example.

Key words: hydrodynamic journal bearing system; Sommerfeld number; stability; non-linear

0　引言

旋转机械广泛应用于机械、动力、航空航天等工程技术领域，其滑动轴承转子的涡动及稳定性对轴承转子系统的设计至关重要[1-4]。滑动轴承转子系统的稳定性及动力学特性与系统的结构参数有着密切关系，国外学者在滑动轴承转子系统研究中常采用量纲一参数——Sommerfeld 数 s 描述系统的主要参数。以 360°圆周径向滑动轴承为例，Sommerfeld 数定义为 $s=\mu nLD_b r_j^2/(Fc)^2$，其中，μ 为流体动力黏度，Pa·s；n 为转子转速，r/min；F 为轴承载荷，N；L、D_b、r_j 分别为轴承长度、轴承直径和轴颈半径，m；c 为轴承半径间隙，m。s 是描述滑动轴承转子系统稳定性及动态特性的重要参数之一，也是滑动轴承转子系统设计中的重要设计参数之一[5-8]。本文以刚性、质量对称的 360°圆周径向滑动轴承转子系统为例，介绍基于 Sommerfeld 数的系统

收稿日期：2009—02—17
基金项目：国家自然科学基金资助项目(50865001)；广西自然科学基金资助项目(桂科自 0991066)；广西高校优秀人才计划资助项目(桂教人才 0826)；英国 Staffordshire 大学博士奖学金资助项目

参考文献：

[1] 白丽平，伍乃骐. 半导体重入加工过程自动组合装置的建模与分析[J]. 计算机集成制造系统，2005，11(3)：320-325.

[2] 王中杰，吴启迪. 半导体生产线控制与调度研究[J]. 计算机集成制造系统，2002，8(8)：607-610.

[3] 李莉，乔非，吴启迪. 半导体制造重调度研究[J]. 中国机械工程，2006，17(6)：612-615.

[4] Shin Y H, Lee Y E, Kim J H, et al. Modeling and Implementing a Real-time Scheduler for Dual-armed Cluster Tools[J]. Computers in Industry, 2001, 45: 13-27.

[5] Lopez M J, Wood S C. Systems of Multiple Cluster Tools: Configuration, Reliability, and Performance [J]. IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing, 2003, 2(2): 170-178.

[6] Wu Naiqi, Chu Chengbin, Chu Feng, et al. A Petri Net Method for Schedulability and Scheduling Problems in Single-arm Cluster Tools with Wafer Residency Time Constraints[J]. IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing, 2008, 21(2): 224-237.

（编辑　张　洋）

作者简介：李　飞，男，1982 年生。广东工业大学机电工程学院硕士研究生。研究方向为工业工程与系统仿真。发表论文 1 篇。伍乃骐，男，1949 年生。广东工业大学机电工程学院教授、博士研究生导师。

稳定性的非线性分析方法。

1 滑动轴承转子系统非线性油膜力模型与 Reynolds 方程

采用非线性分析方法分析滑动轴承转子系统动力学特性及其稳定性问题的核心是计算非线性油膜力。目前主要通过用差分法直接或简化求解 Reynolds 方程以获得非线性油膜力，相比之下直接求解的精度高于简化求解的精度[9]。

图 1 所示为径向滑动轴承转子系统的动力学模型，其中 O_b 为轴承轴心，O_j 为轴颈轴心，e 为偏心距，h 为油膜厚度，Φ 为转子处于稳定状态时的姿态角，θ 为转子的位置角，v_t 为轴颈的表面速度（油膜的切向速度）。当流体满足一定条件时[4,7]，Reynolds 方程可写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\frac{\partial(v_j h\rho)}{\partial x}+12\rho\frac{\partial h}{\partial t} \tag{1}$$

式中，x、z 为轴承的圆周方向和径向坐标；p 为油膜压力；ρ 为油膜密度；v_j 为轴颈表面线速度，m/s；t 为时间。

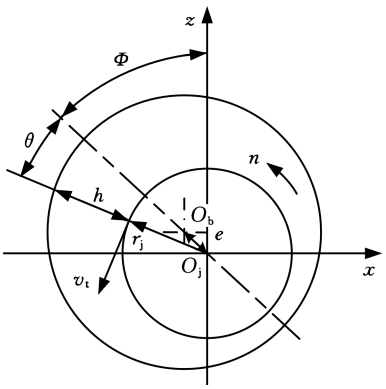


图 1 滑动轴承转子系统动力学模型

在大多数情况下，可认为润滑油的动力黏度及密度为常数，此时，Reynolds 方程可以简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6\mu v_j\frac{\partial h}{\partial x}+12\mu\frac{\partial h}{\partial t} \tag{2}$$

根据图 1 所示的模型可以推导出油膜的厚度：

$$h=c[1+\varepsilon\cos\theta-\varepsilon^2 c\sin^2\theta/(2r_j)] \tag{3}$$

式(3) 可简化为

$$h=c(1+\varepsilon\cos\theta) \tag{4}$$

式中，ε 为量纲一的偏心率，$\varepsilon=e/c$。

2 Reynolds 方程的求解

因为 Reynolds 方程是二阶非线性偏微分方程，早期的处理方法是对轴承非线性动态油膜力进行线性化处理，采用 8 个系数来表示系统的刚度和阻尼。虽然线性分析方法有一定的局限性，使得分析的结果较为保守[7,9]，但可以帮助工程技术人员在宏观上确定系统的稳定性，所以在某些领域仍然有着重要的应用价值[10-11]。

由于滑动轴承转子系统在很多实际情况下并不满足小扰动条件，线性分析结果不能全面反映轴承油膜的动力学特性，因此滑动轴承转子系统的非线性动力学行为及稳定性问题成为该领域内的重要课题之一[1-9]。有限差分法被广泛用于 Reynolds 方程的求解和系统分析[5-9]。

采用有限差分法求解 Reynolds 方程时，首先将油膜沿轴承圆周方向展开，并划分网格，如图 2、图 3 所示。假设沿轴承圆周方向（x 方向）和轴颈方向（y 方向）分别平分 m 等份和 n 等份，划分网格后，对于任意一个节点(i,j)，Reynolds 方程的每一项可以表达为

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2}=\frac{p_{i+1,j}+p_{i-1,j}-2p_{i,j}}{(\Delta x)^2} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}z^2}=\frac{p_{i,j+1}+p_{i,j-1}-2p_{i,j}}{(\Delta z)^2} \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{h_o^3(p_{i+1,j}-p_{i,j})-h_p^3(p_{i,j}-p_{i-1,j})}{(\Delta x)^2} \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)=\frac{h_q^3(p_{i,j+1}-p_{i,j})-h_r^3(p_{i,j}-p_{i,j-1})}{(\Delta z)^2} \tag{8}$$

$$6\mu v_j\frac{\partial h}{\partial x}=6\mu v_t\frac{h_o-h_p}{\Delta x} \tag{9}$$

$$12\mu\frac{\partial h}{\partial t}=12\mu v_n \tag{10}$$

式中，v_j 为轴颈的表面速度（油膜的切向速度）；v_n 为油膜的径向速度，当转子处于稳态时，$v_n=0$。

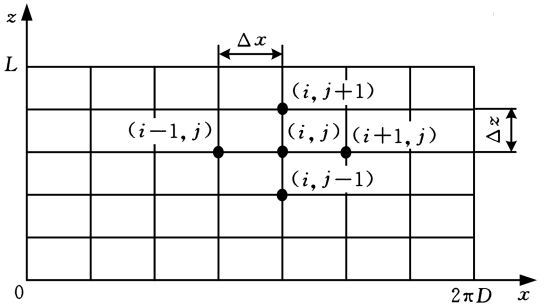


图 2 沿轴承圆周方向展开的油膜网格

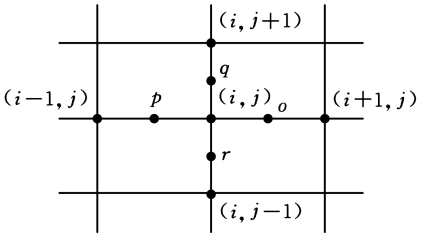


图 3 任意网格节点(i,j)的局部图

因此，将式(7) ～ 式(10) 代入式(2)，可以计算出任意一个节点(i,j)的油膜压力：

$$p_{i,j}=\{h_o^3 p_{i+1,j}+h_p^3 p_{i-1,j}+\sigma(h_q^3 p_{i,j+1}+h_r^3 p_{i,j-1})-[6\mu v_j(h_o-h_p)\Delta x+12\mu v_n(\Delta x)^2]\}/[h_o^3+h_p^3+\sigma(h_q^3+h_r^3)] \tag{11}$$

$$\sigma=(\Delta x/\Delta y)^2$$

在编程计算时可以采用不同的边界条件，较为方

便的边界条件是 Reynolds 边界条件[4]。

3　油膜力计算

当获得油膜压力后，就可以通过数值积分计算出油膜力沿 U、V 方向的分量 F_{bu}、F_{bv}（图 4）：

$$F_{bu} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\cos\theta_{i,j}\Delta x\Delta z \tag{12}$$

$$F_{bv} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\sin\theta_{i,j}\Delta x\Delta z \tag{13}$$

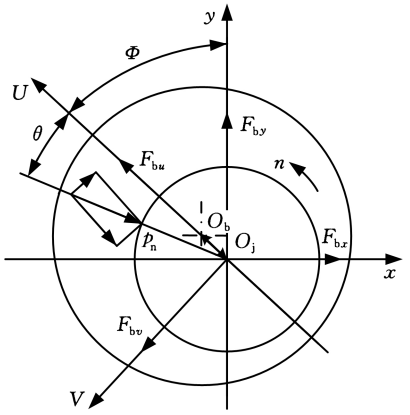


图 4　油膜力计算模型

根据姿态角进行坐标转换，即可求出水平方向和垂直方向上的油膜力分量 F_{bx}、F_{by}：

$$F_{bx} = -F_{bu}\sin\Phi - F_{bv}\cos\Phi \tag{14}$$

$$F_{by} = F_{bu}\cos\Phi - F_{bv}\sin\Phi \tag{15}$$

4　稳态特性

对于水平安装的滑动轴承转子系统，其轴承载荷方向为垂直方向，因此，当系统处于稳定状态时，油膜力水平分量 $F_{bx}=0$，而垂直分量 F_{by} 与轴承载荷大小相等，方向相反。通过寻找 $F_{bx}=0$ 的位置，就可以找出稳定状态时的姿态角和承载能力。

图 5 所示为系统处于稳定状态时姿态角与量纲一偏心率的关系。通过稳态时的载荷计算出量纲一 Sommerfeld 数，揭示出稳态时 Sommerfeld 数与偏心率之间的关系，如图 6 所示。

5　轴心轨迹计算

轴心轨迹分析是判定系统稳定性的重要手段。假定轴颈从任意一个起始点 (x_0, y_0) 开始运动，在油膜力的作用下，根据牛顿定律，将会加速运动，形成一定形状的轴心轨迹。在任意一个位置 (x_i, y_i) 处，油膜力可以通过 Reynolds 方程求出，但此时应同时考虑油膜的切向速度和径向速度。设 (x_i, y_i) 处轴心在 x、y 方向的速度分别为 v_{xi} 和 v_{yi}，转子的角速度为 ω，则根据图 7 可以推导出油膜的切向速度 v_t 和径向速度 v_n：

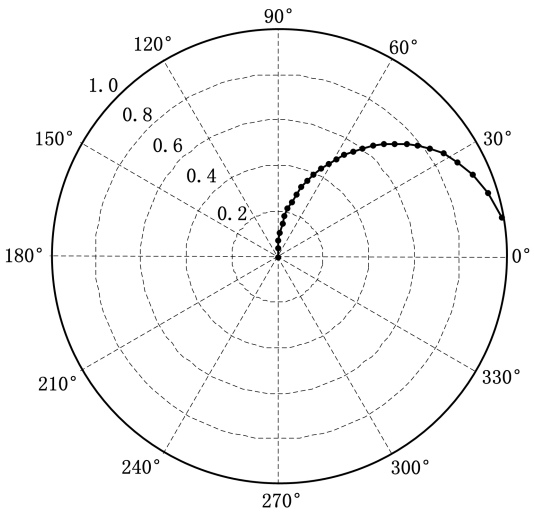


图 5　系统稳定运行时姿态角与偏心率的关系（$L/D_b=1$）

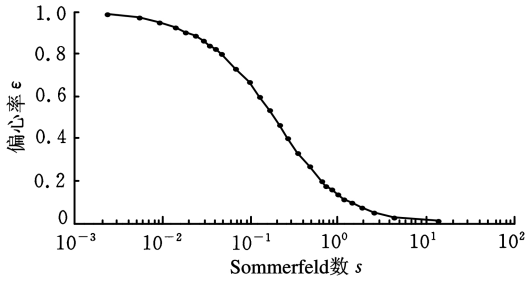


图 6　系统稳定运行时 Sommerfeld 数与偏心率的关系（$L/D_b=1$）

$$v_t = \omega r_j - v_x\cos(\theta+\Phi) - v_y\sin(\theta+\Phi) \tag{16}$$

$$v_n = v_x\sin(\theta+\Phi) - v_y\cos(\theta+\Phi) \tag{17}$$

通过求解 Reynolds 方程，可以得到此时轴颈在 x 方向和 y 方向所受到的油膜力 F_{bxi}、F_{byi}，轴颈在 x 方向和 y 方向的瞬时加速度为

$$\ddot{x}_i = F_{bxi}/m \tag{18}$$

$$\ddot{y}_i = (F_{byi} - F)/m \tag{19}$$

式中，m 为转子的质量。

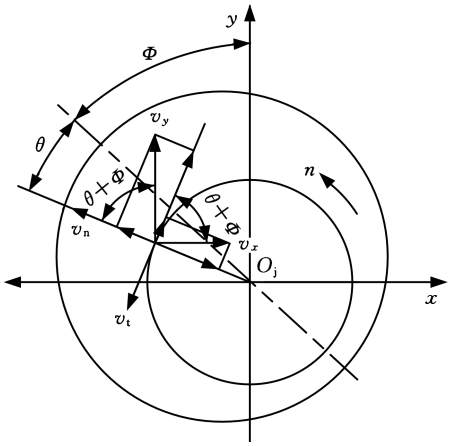


图 7　轴心瞬态轨迹计算模型

轴心在 x 方向和 y 方向的瞬态速度及位移分别为

$$\dot{x}_i = \ddot{x}_i\Delta t + \dot{x}_{i-1} \tag{20}$$

$$\dot{y}_i = \ddot{y}_i \Delta t + \dot{y}_{i-1} \tag{21}$$

$$x_i = \dot{x}_i \Delta t + x_{i-1} \tag{22}$$

$$y_i = \dot{y}_i \Delta t + y_{i-1} \tag{23}$$

式中，Δt 为一个微小的时间间隔，通常取 $\Delta t = 12/(5n)$。

某一刚性、质量对称滑动轴承转子系统参数如下：流体动力黏度 $\mu = 0.017\text{Pa} \cdot \text{s}$，转子质量 $m = 18.5\text{kg}$，轴承长度 $L = 76.2\text{mm}$、轴承直径 $D_b = 76.454\text{mm}$、转子直径 $D_j = 75.692\text{mm}$、轴承半径间隙 $c = 0.381\text{mm}$。采用上述方法计算并绘出的该系统在不同转速时的轴心轨迹如图 8 所示（图中箭线表示轴心运动方向）。图 8a 表明该系统在转速为 3200.0r/min 时，轴心轨迹逐步收敛于稳定的位置；图 8c 表明系统在 4800.0r/min 时轴心轨迹逐步发散，系统将会不稳定；当系统处于 3824.3r/min 时，系统处于稳定与不稳定的临界点（图 8b），因此可以认为系统稳定的临界转速为 3824.3r/min。Ogrodnik[7] 所作实验（实验用滑动轴承转子系统参数与本例相同）获得的轴承转子系统的实验临界转速为 3800r/min，可见计算结果与实验结果是一致的。

6 临界转速的确定

如上所述，系统的临界转速 n_0 可以通过转子轴心轨迹是否收敛或发散来判定。在数学上可以通过计算转子瞬态轴心轨迹波形的对数衰减率来确定临界转速。

假设某一系统转子轴心轨迹的波形如图 9 所示，定义该波形的对数衰减率：

$$l_d = \ln(x_1/x_3) \tag{24}$$

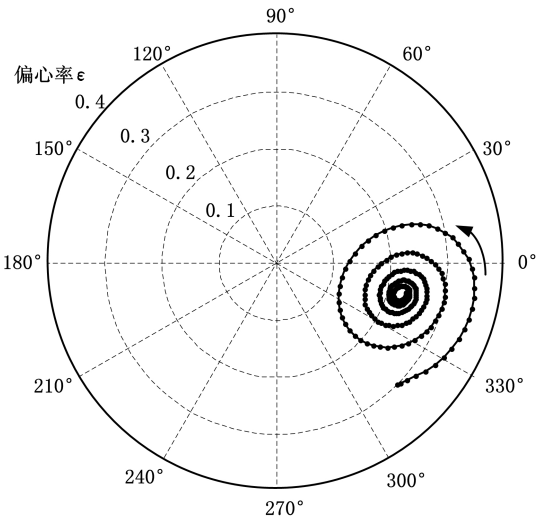
式中，x_1、x_3 分别为相邻 2 个波峰的峰值。

当对数衰减率 $l_d < 0$ 时，波形发散，系统趋于不稳定；当 $l_d > 0$ 时，系统趋于稳定；当 $l_d = 0$ 时，系统处于临界稳定状态。在寻找临界点时，可以任取 5 ～ 8 个转速，计算对数衰减率，通过插值法得出对数衰减率与转子转速的关系，从而可以快速寻找 $l_d = 0$ 的点，如图 10 所示，进而求出系统的临界转速。

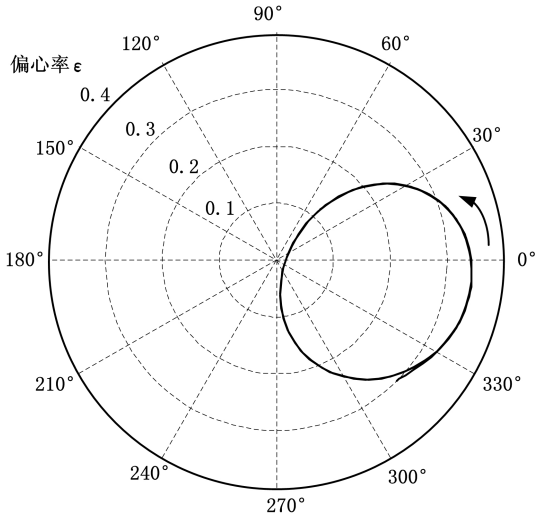
7 滑动轴承转子系统稳定性临界曲线

上述临界转速的确定是以某一滑动轴承转子系统参数为计算依据而得到的数值解，不具备普遍意义。因此需要通过量纲一化使其具有普遍意义，从而可以指导工程应用。

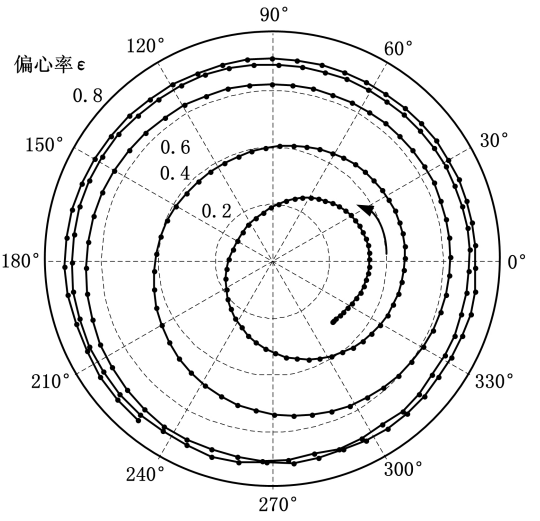
量纲一的 Sommerfeld 数反映系统的主要结构、载荷、转速和流体动力黏度等特性，图 6 反映了 Sommerfeld 数与系统稳定运行时的量纲一偏心率的关系，不同的轴承转子系统只要 Sommerfeld 数的值相同，它们稳定运行时的偏心率相同。



(a)$n = 3200.0\text{r/min}$



(b)$n = 3824.3\text{r/min}$



(c)$n = 4800.0\text{r/min}$

图 8 转子轴心轨迹

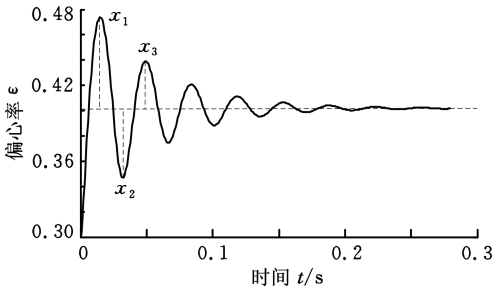


图 9　转子轴心轨迹波形对数衰减率

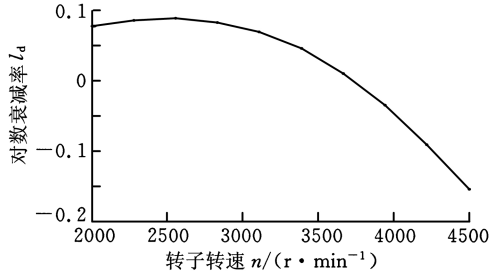


图 10　对数衰减率与转子转速的关系

在反映系统稳定性临界转速时，采用量纲一的运行参数 $o_p = F/(mc\omega^2)$ 来表示量纲一的稳定性临界转速。

以量纲一的运行参数 o_p 作为纵坐标，量纲一的偏心率作为横坐标建立坐标系。当某一轴承转子系统的运行转速逐步增大时(其他参数变)，其 Sommerfeld 数也随着增大，在该坐标系中将形成一条运行轨迹，如图 11 中的箭线所示。系统也由稳定运行状态逐步进入不稳定运行状态，从而在坐标系中可以得到一个临界转速点。如果改变系统的某一参数，如流体动力黏度，则系统在该坐标系中的运行轨迹将会平移，从而得到不同的临界转速点，这些临界转速点连在一起就构成了一条量纲一的系统稳定性临界曲线，它将坐标空间分为稳定区域和不稳定区域，如图 11 所示。对于不同的滑动轴承转子系统，只要计算其 Sommerfeld 数，结合图 6 确定偏心率，计算量纲一运行参数 o_p，就可以标出系统在坐标系中的位置，从而判断系统是否稳定，也可以根据此图确定某一系统的临界转速。

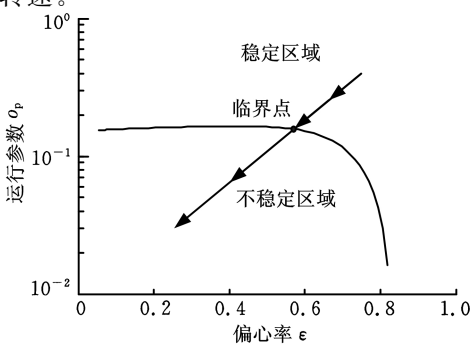


图 11　滑动轴承转子系统稳定性临界曲线

8　结束语

本文系统地介绍了基于非线性油膜力模型的滑动轴承转子系统稳定性分析方法，在系统分析过程中，量纲一的 Sommerfeld 数是一个重要的参数，它是反映系统主要结构、载荷、转速和流体动力黏度的一个综合参数，通过该参数可以很方便地计算、分析系统的动力学特性，评定系统的稳定性。

参考文献：

[1] 黄文虎. 旋转机械非线性动力学设计基础理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2006.

[2] 闻邦椿. 高等转子动力学：理论、技术与应用[M]. 北京：机械工程出版社，2000.

[3] 虞烈. 轴承－转子系统动力学[M]. 西安：西安交通大学出版社，2001.

[4] 杨金福. 流体动力润滑及轴承转子系统的稳定性研究[D]. 北京：华北电力大学，2006.

[5] Dong Dali. The Effect of Oil Aeration on the Behavior of Journal Bearings[D]. Staffordshire, UK: Staffordshire University, 2006.

[6] Goodwin M J, Lim L K, Roach M P, et al. Stability Analysis of a Variable Impedance Hydrodynamic Bearing [M]//American Society of Mechanical Engineers Staff. Vibrations in Rotating Machinery. London: Professional Engineering Publishing, 1996: 211-224

[7] Ogrodnik P J. Operation of Rotor－bearing Systems Subjected to Dynamic Conical Misalignment[D]. Staffordshire, UK: Staffordshire University, 1989.

[8] Cameron A. Basic Lubrication Theory[M]. Chichester: Ellis Horwood Limited, 1976.

[9] 黄文虎，夏松波，焦映厚，等. 旋转机械非线性动力学设计基础理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2006.

[10] Lin Jaw－Ren. Linear Stability Analysis of Rotor－bearing System: Couple Stress Fluid Model[J]. Computers & Structures, 2001, 79(8): 801-809.

[11] Wing Cheng－I, Chen Chien－Ru. Linear Stability of Short Journal Bearings with Consideration of Flow Rheology and Surface Roughness[J]. Tribology International, 2001, 34(8): 507-516.

（编辑　张　洋）

作者简介：徐武彬，男，1966 年生。广西工学院机械工程系教授。主要研究方向为滑动轴承转子动力学、数字化设计。发表论文 50 余篇。**王镇江**，男，1961 年生。广西工学院汽车工程系高级工程师。**陈其兵**，男，1962 年生。广西工学院机械工程系高级工程师。**李　冰**，女，1978 年生。广西工学院机械工程系讲师。**张宏献**，男，1982 年生。广西工学院机械工程系硕士研究生。