

托辊附近运动带材稳态构型研究

熊 烽 韩奉林 易朋兴 史铁林

华中科技大学, 武汉, 430074

摘要:运动带材在托辊附近的空分分布形态对带材运行安全有着重要影响, 针对此, 研究了描述带材稳态构型的动边界边值问题, 将该问题转化为固定边界边值问题后, 采用配置法计算获得带材的稳态构型。给出一组带材构型描述参数, 研究了运动带材自身属性及带材工作参数与构型参数的关系。研究表明, 带材在带轮附近有隆起趋势, 使带材在托辊上的包角减小, 对带材的安全运行有不利影响, 降低带材的运行速度、减小带材弯曲刚度、增大工作张力、增大托辊直径, 有利于缓解此不利影响。带材线密度增大将使隆起高度增加, 但隆起段延伸长度将缩短。

关键词:运动带材; 稳态构型; 托辊; 包角; 影响因素

中图分类号: TB122

文章编号: 1004—132X(2009)19—2358—04

Steady Configuration of Moving Strip around a Pulley

Xiong Feng Han Fenglin Yi Pengxing Shi Tielin

Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, 430074

Abstract: To investigate the spatial distribution mode of a moving strip around a pulley and effects of this spatial distribution mode on operation security, a BVP (boundary value problem) with undetermined boundary describing the steady configuration of the moving strip was proposed. After the BVP with undetermined boundary being transformed into a BVP with determined boundary, the steady configuration of the moving strip was solved by using collocation method. Moreover, a set of parameters describing the configuration of moving strip was put forward. Then influencing factors of these parameters were analyzed. The study shows the moving strip will lift up around a pulley. This phenomenon may reduce the wrap angle of the strip on the pulley and it is harmful to the operation security of strip. The influence of this phenomenon can be weakened by reducing moving velocity of the strip and the flexural rigidity of the strip, increasing the tension in strip and the diameter of pulley. Larger linear density makes uplift of the strip higher, but extending length shorter.

Key words: moving strip; steady configuration; pulley; wrap angle; influencing factor

0 引言

带材在托辊附近的形态分布会影响带材在托辊上的包角, 进而影响带材的安全运行。带材在托辊附近的运动可看作是由两部分叠加而成的^[1]: 一部分为带材的稳态运动, 占主导地位, 其空间形态称之为稳态构型; 另一部分是在稳态构型附近的微幅摄动。稳态构型不仅反映了带材运动的主要特点, 而且又是后续动态分析的基础^[2-3], 因此, 研究运动带材在托辊附近的稳态构型有着重要的意义。

带材在托辊上的边界预先未知, 需要协同带材运动控制方程求解^[2]。目前关于带材运动的研究中, 大多认为带材与托辊的切点固定不动^[4-6], 但这与带材的实际运动情况有所不同。Hwang

等^[7]研究了两轮带传动系统中, 带材与托辊的切点位置与带材运动的耦合关系。Kong 等^[8]重点研究了两轮带传动系统中带的稳态构型, 并进一步研究了稳态构型对带传动系统传动效率和最大传输功率的影响。

上述研究都没有考虑重力对运动带材的影响, 这在带材弯曲刚度较大、线密度较小, 同时托辊之间跨度也较小的情况下, 可以取得较好的计算结果, 但当托辊跨度较大时, 重力的作用就不能忽视, 上述两种方法的计算结果与实际情况有很大差异。

本文综合考虑重力和弯曲刚度的作用提出一种用于计算托辊附近运动带材稳态构型的方法, 并对运动带材稳态构型特点及其影响因素进行了研究。

收稿日期: 2008—12—01

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50803022)

1 带材稳态构型力学建模及求解

考虑如下工况(图1):带材从下方以线速度 v 进入托辊,经过托辊后转向,落在—水平工作平台上。这种工况常见于印刷、造纸及风洞活动地板装备中,具有一定的代表性。

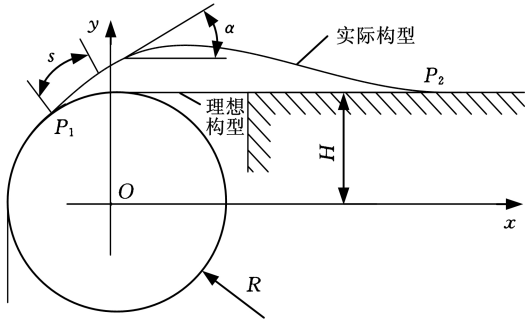


图1 运动带材托辊处工作条件示意图

对问题作如下假设:①带材以均匀欧拉—伯努利梁建模;②带材运动速度恒定;③忽略周围流体的影响。

称从托辊分离点 P_1 到与台面接触的点 P_2 之间的带材为自由段,并将其作为研究对象。取自由段微元如图2所示。图2中, T 为张力, Q 为剪切力, α 为带切线方向与 x 轴正向的夹角, s 为弧长坐标, P_1 点为原点, g 为重力加速度, ρ_l 为带材的工作线密度, ρ_l 与零张力状态下的线密度 ρ_{l0} 之间存在如下关系:

$$\rho_l(s) = \frac{\rho_{l0}}{1 + T(s)/(EA_0)} \quad (1)$$

式中, E 为材料的弹性模量; A_0 为带材零张力下横截面积。

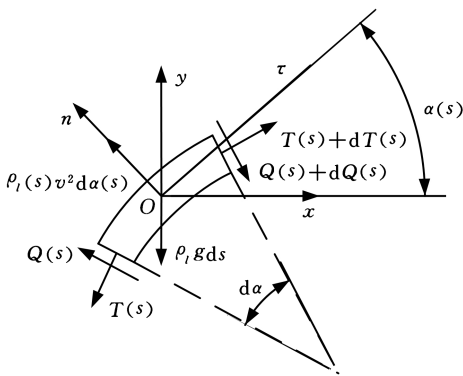


图2 自由段微元受力示意图

由式(1)可知,带材各点的线密度与该点的工作张力相关,但由于带材中各点张力变化与初始张力相比为高阶无穷小量,可认为在某一组工作参数下,带上各点的线密度近似相等,大小可取 P_1 点的工作线密度。令 T_0 为 P_1 点处的工作张力,则带材的工作线密度近似为

$$\rho_l = \frac{\rho_{l0}}{1 + T_0/(EA_0)} \quad (2)$$

离心力在切向的投影为零,忽略高阶无穷小量,则微元的切向平衡方程为

$$dT + Qd\alpha - \rho_l g ds \sin\alpha = 0 \quad (3)$$

对于欧拉—伯努利梁,有: $Q = EI(d\kappa/ds)$, I 为带材横截面对中心轴的惯性矩。由几何关系得曲率 $\kappa = d\alpha/ds$ 。代入式(3),得

$$T' + EI\kappa\kappa' - \rho_l g \sin\alpha = 0 \quad (4)$$

其中,上标“ $'$ ”表示对弧长坐标 s 求导。

微元的离心力 $F = \rho_l ds v^2/d\rho = \rho_l v^2 d\alpha$,其中曲率半径 $\rho = ds/d\alpha$ 。因此可以列出微元法方向的平衡方程:

$$(T - \rho_l v^2)\kappa - EI\kappa'' - \rho_l g \cos\alpha = 0 \quad (5)$$

由于带材弯曲刚度不为零,稳态构型的斜率不能突变,并应在两端点与托辊及平台斜率相协调,故在 P_1 点,带材与托辊相切,切点在托辊截面圆弧上滑动,曲率半径为 R ;在 P_2 点,带材与平台相切,切点在平台上滑动,曲率半径为无穷大。这些边界条件与式(4)、式(5)一起构成一个求解带材稳态构型的动边界边值问题。

动边界边值不易直接求解,通过定义下列量纲一的参数,可将上述动边界边值问题转化为一般两点边值问题:

$$\begin{aligned} \hat{s} &= \frac{s}{L} & \hat{x} &= \frac{x}{L} & \hat{y} &= \frac{y}{L} & \hat{\kappa} &= \hat{L}\kappa \\ \hat{p} &= \frac{T\hat{L}^2}{EI} & \hat{G} &= \frac{\rho_l g \hat{L}^2}{EI} & \hat{v}^2 &= \frac{\rho_l v^2 \hat{L}}{EI} \end{aligned}$$

其中, \hat{L} 为自由段的真实长度,预先未知; x 、 y 为空间直角坐标。定义

$$\hat{q} = (\hat{\kappa}(\hat{s}), \frac{d\hat{\kappa}(\hat{s})}{d\hat{s}}, \hat{p}(\hat{s}), \alpha(\hat{s}), \hat{x}(\hat{s}), \hat{y}(\hat{s}), \hat{L}(\hat{s}))^T$$

并用 \hat{q}_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) 表示 \hat{q} 的各个分量。带材运动控制方程为

$$\frac{d\hat{q}}{d\hat{s}} = \begin{pmatrix} \hat{q}_2 \\ (\hat{q}_3 - \hat{v}^2)\hat{q}_1 - \hat{G}\hat{q}_7 \cos\hat{q}_4 \\ -\hat{q}_1\hat{q}_2 + \hat{G}\hat{q}_7 \sin\hat{q}_4 \\ \hat{q}_1 \\ \cos\hat{q}_4 \\ \sin\hat{q}_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 0 < \hat{s} < 1 \quad (6)$$

相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} &(\hat{q}_1(0)\hat{q}_5(0))^2 + (\hat{q}_1(0)\hat{q}_6(0))^2 = R^2 \\ &\hat{q}_1(0)\hat{q}_5(0) = -R\sin(\hat{q}_4(0)) \\ &\hat{q}_1(1)\hat{q}_5(1) = H \\ &\hat{q}_3(0) = T_0(\hat{q}_7(0))^2/EI \\ &\hat{q}_1(0) = -\hat{q}_7(0)/R \\ &\hat{q}_1(1) = 0 \\ &\hat{q}_4(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(6)和式(7)构成了一个在区间 $[0, 1]$ 上的非线性两点边值问题。求解这类问题的常用数值解法有配置法、打靶法、有限差分法。其中配置法是以满足纯插值约束条件方式, 寻求算子方程近似解的方法, 具有无需计算数值积分、计算量小、收敛阶高等优点。本文即采用配置法求解带材的稳态构型。

采用配置法求解边值问题, 需预先给出一组初始预示解。初始预示解的质量直接影响解的准确性^[9]。通过迭代求解过程, 可以减少对初始预示解的依赖性, 同时可检验结果是否收敛。

2 带材稳态构型及其描述参数

考察一个具体算例, 参数取值如表 1 所示, 为简化计算, 使平台高度与托辊半径相等。计算得带材稳态构型如图 3 所示。

表 1 各参数取值

$R = 0.1\text{m}$	$EI = 0.2\text{N} \cdot \text{m}^2$	$H = 0.1\text{m}$	$\rho_l = 3\text{kg/m}$
$v = 20\text{m/s}$	$g = 9.8\text{m/s}^2$	$T_0 = 1200\text{N}$	

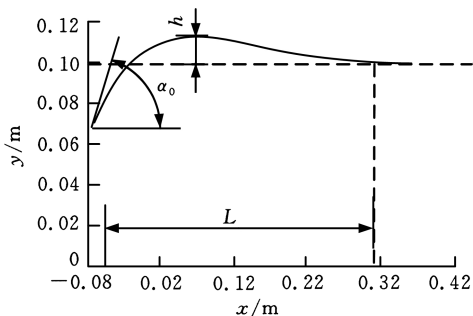


图 3 带材稳态构型

由图 3 可知, 带材稳态构型由一段凸曲线和一段凹曲线相切而成。带材在托辊上的包角有所减小, 带材向上隆起并向后延伸一段距离。

为方便定量研究带材稳态构型的影响因素, 定义下列参数描述该带材的构型: 以 α_0 记带材与托辊分离点带材的倾角, 亦即带材包角的减小量; 以 h 记隆起段的最高纵坐标值与托辊半径之差, 表示隆起段的高度; 以 L 记隆起段的延伸长度, 表示隆起段的影响范围。 α_0 表征带材稳态构型对带材运行安全的影响, h 和 L 表征带材稳态构型对工作性能的影响。

由图 4 可知, 自由段内张力的变化量约占工作张力的 0.8%, 故式(2)中关于带材工作线密度均匀的假设可以满足计算需要。

3 带材性质对稳态构型的影响

对带材稳态构型有影响的带材属性主要有弯

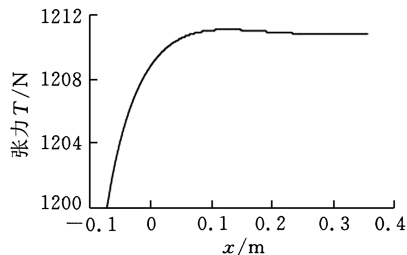


图 4 自由段内张力分布

曲刚度和密度, 下面分别进行讨论。

3.1 弯曲刚度

带材弯曲刚度与材料弹性模量及横截面形状相关。弯曲刚度取一系列值, 其他参数保持不变, 各构型描述参数的计算结果如表 2 所示。

表 2 带材弯曲刚度对构型描述参数的影响

弯曲刚度 EI ($\text{N} \cdot \text{m}^2$)	0.05	0.10	0.20	0.30
分离点倾角 α_0 ($^\circ$)	27.198	36.095	46.095	52.052
延伸长度 L (m)	0.187 29	0.260 24	0.358 01	0.429 21
隆起高度 h (m)	0.004 07	0.007 38	0.012 59	0.016 62

注: 除弯曲刚度外, 其他参数按照表 1 取值。

表 2 表明带材三个构型描述参数随弯曲刚度增大都有增大的趋势, 并呈现出类线性关系。

带材弯曲刚度越大, 其构型越明显地偏离直线状态。由于带材弯曲刚度与厚度的立方成正比, 因此, 带材厚度越小, 弯曲刚度越小, 带材运行时的构型越易于控制。

3.2 工作线密度

带材工作线密度与带材初始横截面面积、带材材料密度、初始工作张力相关。改变带材工作线密度, 其他参数保持不变, 构型描述参数与带材工作线密度关系如表 3 所示。

表 3 带材工作线密度对构型描述参数的影响

工作线密度 ρ_l (kg/m)	0.5	1.0	2.0	3.0
分离点倾角 α_0 ($^\circ$)	7.8917	8.6994	11.8060	46.0950
延伸长度 L (m)	0.653 10	0.467 74	0.362 28	0.358 01
隆起高度 h (m)	0.000 83	0.000 95	0.001 57	0.012 59

注: 除带材工作线密度外, 其他参数按照表 1 取值。

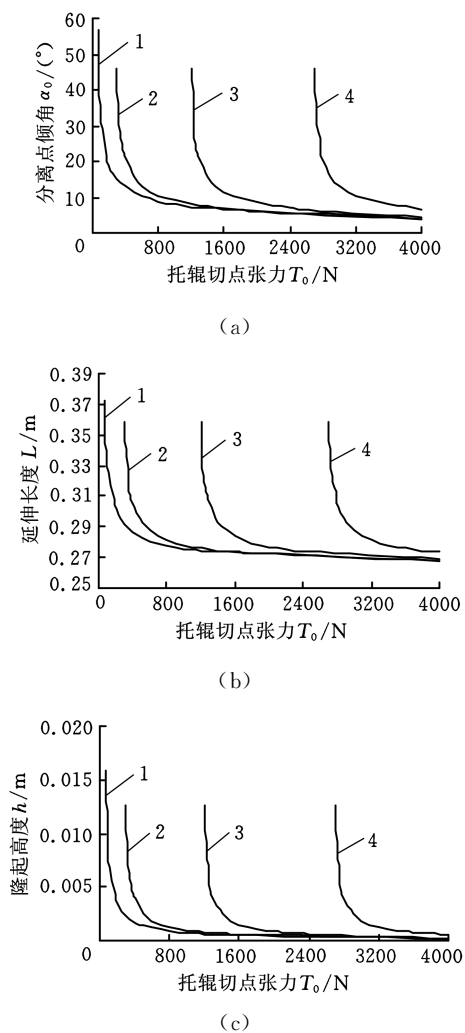
由表 3 可以看出, 稳态构型隆起高度 h 和分离点倾角 α_0 随带材工作线密度增大而增大, 延伸长度 L 却随带材工作线密度增大逐渐减小。线密度增大后惯性力和重力同时增大, 惯性力增大使得带材向上冲的趋势加大, 但重力的增大又使得带材更快地下落, 综合表现为自由段曲线更为陡峭。

4 工作条件参数对稳态构型的影响

带材的工作条件参数,一类是工作中可调整的参数,如工作张力和速度;另一类是不可调整的参数,主要指托辊半径。

4.1 工作张力和速度

自由段上各点张力不同,取 P_1 点处的工作张力表征整体张力大小。为满足稳态构型有唯一解,工作张力和速度应满足 $T > \rho_l v^2$ [10]。构型描述参数随张力、速度的变化趋势如图 5 所示。



1. $v=5\text{m/s}$ 2. $v=10\text{m/s}$ 3. $v=20\text{m/s}$ 4. $v=30\text{m/s}$

图 5 构型描述参数与张力、速度的关系

(除张力、速度外,其他参数按照表 1 取值)

从图 5 中可以看出,对同一运行速度,张力越大,隆起高度、分离点倾角和延伸长度越小,这种趋势在张力相对较小时比较明显,但是当张力超过一定值后,各构型描述参数下降速度明显减缓。本算例中,对各个速度,当张力达到 $\rho_l v^2 + 600$ (N) 时, h 约为 1mm, α_0 约为 9.66° , L 约为 280mm,之后再增大工作张力,对带材稳态构型影响就不大了。同时由于带材自身强度原因,工

作张力也受到限制,因此,正常工作中很难通过增大张力的方式将带材稳态构型转为与带轮相切的直线。对于不同速度、同一张力的情况,速度越大,各构型描述参数越大,带材越难控制。

4.2 托辊半径

运动带材通过不同半径的托辊时,自由段托辊端边界条件不同,对带材构型也会有影响,表 4 列出了不同托辊半径下的构型描述参数。

表 4 带材弯曲刚度对形态描述参数的影响

托辊半径 $R(\text{m})$	0.06	0.08	0.10	0.12
分离点倾角 $\alpha_0(^{\circ})$	66.837	55.828	46.095	38.141
延伸长度 $L(\text{m})$	0.419 44	0.385 65	0.358 01	0.334 32
隆起高度 $h(\text{m})$	0.018 581	0.015 690	0.012 590	0.009 960

注:除托辊半径外,其他参数按照表 1 取值。

从表 4 中可知,随着托辊半径的增大,各形态描述参数呈类线性减小关系,带材运动形态趋于平坦。因此当不能通过增大工作张力方法有效改善其稳态构型时,可以通过增大托辊半径的方式对其稳态构型进行优化。

5 结论

(1)通过分析托辊附近带材的运动及受力条件,建立了描述带材稳态构型的动边界边值问题,将动边界边值问题转化为固定边界边值问题后,采用配置法获得了带材稳态构型。

(2)由于带材弯曲刚度和重力的存在,运动带材在托辊附近的构型由一段凸曲线和一段凹曲线相切而成,带材在托辊上的包角较理想状态小时,可能诱发跑偏和打滑现象发生,不利于运行安全。

(3)研究了带材属性对带材构型描述参数的影响。随着带材弯曲刚度增大,各描述参数均按类线性规律增大;增大带材线密度,隆起高度和包角减小量随之增大,但延伸长度有所减小。

(4)研究了工作条件对带材构型描述参数的影响。在相同工作速度下,各参数随工作张力的增大而减小,当张力超过一定值时,减小速度降低;相同张力下,各参数随工作速度的增大而减小;增大托辊直径可使各参数呈类线性减小,当仅通过增大张力不能改善带材构型时可以考虑增大托辊半径。

参考文献:

- [1] Kong L, Parker R G. Vibration of an Axially Moving Beam Wrapping on Fixed Pulleys[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 280(3/5): 1066-1074.

(下转第 2392 页)

6 结束语

本文针对注塑产品几何形状复杂和壁厚均匀的特点,提出了基于中面的特征识别方法。该方法对基于图的方法解析 B-rep 表达的三维实体模型进行了改进,用中面模型简化注塑产品的几何形状,提出了面一边属性图和面一边属性矩阵表达中面模型的拓扑结构,在此基础上对特征进行了分类并研究了各自的特征识别算法。文中给出的实例表明本文提出的注塑产品特征识别算法的可行性。

进一步的研究工作包括:拓展和细分注塑产品的特征,并给出相应的特征识别算法,使其适应更加复杂的几何形状;研究基于中面模型的注塑产品侧凹特征识别方法;研究中面模型中相交特征的特征识别方法;实现本文提出的特征识别算法与 CAD 系统环境的集成。

参考文献:

- [1] 花广如,周雄辉.特征识别的现状与存在的问题及解决方案[J].机床与液压,2008,36(4):19-22.
- [2] Chen Y M, Wen C C, Ho C T. Extraction of Geometric Characteristics for Manufacturability Assessment[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2003,19(4):371-385.
- [3] 邵健,吕震,柯映林.基于图的注塑产品侧凹特征识别技术的研究[J].中国机械工程,2006,17(1):52-55.
- [4] Zhang X, Wang J, Yamazaki K, et al. A Surface Based Approach to Recognition of Geometric Features for Quality Freeform Surface Machining[J]. Computer-aided Design,2004,36(8):735-744.
- [5] Yin Zhouping, Ding Han, Li Hanxiang. Geometric Mould Ability Analysis by Geometric Reasoning and Fuzzy Decision Making[J]. Computer-aided Design,2004,36(1):37-50.
- [6] Belludi N, Yip-Hoi D. High Level Feature Recognition Using Approximate and Partial Exact CAD Models [C]//Proceedings of DETC'02. ASME 2002 Design Engineering Technical Conferences. Montreal,2002:113-127.
- [7] Rezayat M. Midsurface Abstraction from 3D Solid Models: General Theory and Applications[J]. Computer-aided Design,1996,26(11):905-915.
- [8] 李伟平,谷正气,邓彪.面向 CAD/CAPP/CAM 的特征识别技术[J].中国机械工程,2006,17(10):249-253.
- [9] Stefan Richte. NIST STEP Class Library[EB/OL]. (2005-01-09)[2006-03-01]. <http://www.statik.tu>

-cottbus.de/fileadmin/project_dth/scl/.

(编辑 王艳丽)

作者简介:李伟平,男,1971年生。湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室副教授、博士。研究方向为数字化设计与制造。
谷正气,男,1963年生。湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室教授、博士研究生导师。
何忆斌,男,1966年生。湖南大学汽车车身先进设计制造国家重点实验室副研究员、博士。

(上接第 2361 页)

- [2] Kong L, Parker R G. Equilibrium and Belt-pulley Vibration Coupling in Serpentine Belt Drives [J]. Journal of Applied Mechanics, 2003, 70(5): 739-750.
- [3] Kong L, Parker R G. Coupled Belt-pulley Vibration in Serpentine Drives with Belt Bending Stiffness [J]. Journal of Applied Mechanics, 2003, 71(1): 109-120.
- [4] Zhang L, Zu J W. Non-linear Vibrations of Viscoelastic Moving Belts, Part I: Free Vibration Analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 216(1): 75-91.
- [5] Rubin M B. An Exact Solution for Steady Motion of an Extensible Belt in Multipulley Belt Drive Systems [J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(3): 311-316.
- [6] 郑大字,孟庆鑫,陈申,等.带传动惯性力影响的研究[J].中国机械工程,2008,19(17):2028-2032.
- [7] Hwang S, Perkins N. High Speed Stability of Coupled Band/Wheel Systems: Theory and Experiment [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 169(4): 459-483.
- [8] Kong L, Parker R G. Steady Mechanics of Belt-pulley Systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 2005, 72(1): 25-34.
- [9] Shampine L F, Kierzenka J, Reichelt M W. Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c [R/OL]. Natick: the MathWorks, 2000 [2008-08-15]. <ftp://ftp.mathworks.com/pub/doc/papers/bvp/>.
- [10] Yang R J. Steady Motion of a Thread Over a Rotating Roller [J]. Journal of Applied Mechanics, 1994, 61(1):16-22.

(编辑 王艳丽)

作者简介:熊峰,男,1968年生。华中科技大学机械科学与工程学院副教授、博士。研究方向为数字制造、机电一体化。发表论文 20 余篇。
韩奉林,男,1983年生。华中科技大学机械科学与工程学院博士研究生。
易朋兴,男,1974年生。华中科技大学机械科学与工程学院博士后研究人员。
史铁林,男,1964年生。华中科技大学机械科学与工程学院副院长、教授、博士研究生导师。